10 problèmes de démonstration géométrique corrigés

Nous attirons l'attention des étudiants peu familiers avec ce genre de travail sur le fait que la proximité de vos productions avec les corrigés fournis ici n'est pas un critère de validité. Une version «proche» du corrigé peut être fausse et une version très éloignée peut être correcte. Il est vivement conseillé de soumettre certaines de vos productions à votre enseignant.

1. A et B sont deux points situés sur un cercle de centre O.
ABC est un triangle isocèle en C
Démontrer que les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires.

- A et B sont sur un même cercle de centre O, donc OA = OB.
- OA = OB, donc O est sur la médiatrice de [AB].

- ABC est isocèle en C, donc CA = CB.
- CA = CB donc C est sur la médiatrice de [AB].

- O et C sont sur la médiatrice de [AB], donc (OC) est la médiatrice de [AB].
- (OC) est la médiatrice de [AB] donc (OC) et (AB) sont perpendiculaires.

2. ABCD et ABEF sont deux parallélogrammes.
Démontrer que les droites (FD) et (EC) sont parallèles.

- ABCD est un parallélogramme, donc ses côtés opposés [AB] et [CD] sont parallèles et de même longueur.
- ABEF est un parallélogramme, donc ses côtés opposés [AB] et [EF] sont parallèles et de même longueur.

- CD = AB et AB = EF donc CD = EF.
- (CD) // (AB) et (AB) // (EF) donc (CD) // (EF).

- Les côtés opposés [CD] et [EF] du quadrilatère non croisé CDFE sont à la fois parallèles et égaux, donc CDFE est un parallélogramme.
- CDFE est un parallélogramme, donc (FD) // (CE).

3. Deux cercles de centres O et O' se coupent en A et B. On trace le diamètre [AC] du cercle du cercle de centre O et le diamètre [AD] du cercle de centre O'.
Démontrer que les points B, C et D sont alignés.

- B est sur le cercle de diamètre [AC] donc le triangle ABC est rectangle en B.
- ABC est rectangle en B, donc (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

- B est sur le cercle de diamètre [AD] donc le triangle ABD est rectangle en B.
- ABD est rectangle en B, donc (AB) et (BD) sont perpendiculaires.

- Les droites (BC) et (BD) sont toutes les deux perpendiculaires à (AB) donc (BC) // (BD)
- (BC) et (BD) sont parallèles et ont le point B en commun donc elles sont confondues et les points B,C et D sont alignés.

4. On trace un cercle de centre O et de diamètre [AB]
On place un point M sur le cercle.
B' est le symétrique de B par rapport à M
La parallèle à (OM) passant par B coupe (AM) en P
Démontrer que AB'PB est un losange.

- [AB] est un diamètre du cercle de centre O donc O est le milieu de [AB].
- Dans le triangle ABP, la droite (OM) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BP] , donc elle coupe le côté [AP] en son milieu qui est donc le point M.
- B' est le symétrique de B par rapport à M, donc M est le milieu de [BB'].
- M est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M.
- AMB est rectangle en M donc les droites (AP) et (BB') sont perpendiculaires.
- Les diagonales [AP] et [BB'] du quadrilatère AB'PB ont le même milieu et sont perpendiculaires donc AB'PB est un losange.

5. [AB] et [CD] sont deux diamètres d'un cercle de centre O.
A' est le symétrique de A par rapport à B.
Les droites (BC) et (D A') se coupent en R.
Démontrez que R et le milieu de [DA'].

- [AB] et [CD] sont deux diamètres du même cercle, donc ils ont le même milieu.
- [AB] et [CD] ont le même milieu, donc ACBD est un parallélogramme.
- ACBD est un parallélogramme, donc (AD) // (BC).
- A' est le symétrique de A par rapport à B donc B est le milieu de [AA'].
- Dans le triangle ADA', la droite (BC) passe par le milieu de [AA'] et est parallèle à (AD) donc elle coupe [DA'] en son milieu, qui est alors le point R.

6. ABCD est un quadrilatère quelconque.
R est le milieu de [AB], S le milieu de [BC], T celui de [CD] et U celui de [DA]
Démontrer que RSTU est un parallélogramme.

- Dans le triangle ABC, R est le milieu de [AB], S est le milieu de [AC], donc (RS) // (AC)
- Dans le triangle ADC, U est le milieu de [AD], T est le milieu de [CD], donc (TU) // (AC)
- On a (RS) // (AC) et (TU) // (AC), donc (RS) // (TU)
- On prouve de la même façon en utilisant les triangles BAD et BCD que (TS) // (RU)
- Le quadrilatère RSTU a ses côtés opposés parallèles deux à deux, donc c'est un parallélogramme.

7. ABCD est un parallélogramme de centre O.
X est le symétrique de O par rapport à B, Y est le symétrique de O par rapport à C.
Les droites (XA) et (YD) se coupent en S.
Démontrer que A est le milieu de [XS].

- X est le symétrique de O par rapport à B, donc B est le milieu de [OX].
- Y est le symétrique de O par rapport à C, donc C est le milieu de [OY].
- Dans le triangle OXY, B est le milieu de [OX] et C est le milieu de [OY] donc (BC) // (XY) et XY = 2BC.
- ABCD est un parallélogramme, donc (AD) // (BC) et AD = BC.
- XY = 2BC et BC = AD, donc XY = 2 AD.
- (AD) // (BC) et (BC) // (XY) donc (AD) // (XY)
- Dans le triangle SXY, A est sur (SX), D est sur (SY), et (AD) // (XY) donc $\frac{SA}{SX} = \frac{SD}{SY} = \frac{AD}{XY}$ (théorème de Thalès).
- $\frac{SA}{SX} = \frac{AD}{XY}$ or XY = 2 AD donc $\frac{SA}{SX} = \frac{1}{2}$.
- A est le point du segment [SX] tel que SA = SX / 2, c'est donc le milieu de [SX].

8. R et P sont deux points d'un cercle de diamètre [AB].
A_1 est le symétrique de A par rapport à R. A_2 est le symétrique de A par rapport à P
Démontrer que les angles $\widehat{BA_1A_2}$ et $\widehat{BA_2A_1}$ sont égaux.

- A_1 est le symétrique de A par rapport à R, donc R est le milieu de $[AA_1]$
- R est sur le cercle de diamètre [AB] donc ABR est rectangle en R par conséquent (BR) est perpendiculaire à (AA_1)
- (BR) passe par le milieu de $[AA_1]$ et lui est perpendiculaire donc (BR) est la médiatrice de $[AA_1]$.
- B est sur la médiatrice de $[AA_1]$ donc $BA = BA_1$
- On prouve de la même façon que (BP) est la médiatrice de $[AA_2]$ puis que $BA = BA_2$
- $BA_1 = BA$ et $BA = BA_2$, donc $BA_1 = BA_2$
- $BA_1 = BA_2$ donc BA_1A_2 est un triangle isocèle en B
- BA_1A_2 est un triangle isocèle en B donc les angles $\widehat{BA_1A_2}$ et $\widehat{BA_2A_1}$ sont égaux.

9. Soit un cercle de diamètre [AB] et de centre O. P est un point du cercle.
La parallèle à (OP) passant par A coupe (BP) en R.
S est le point de [AR] tel que AS = OP.
(OR) et (AP) se coupent en M.
Démontrer que les point B, M et S sont alignés.

- O est le centre du cercle, et [AB] est un diamètre, donc O est le milieu de [AB] et [OR] est une médiane de ABR
- Dans le triangle ABR, la droite (OP) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [AR], donc elle passe par le milieu du côté [BR], par conséquent P est le milieu de [BR].
- P est le milieu de [BR] donc [AP] est une médiane de ABR.
- [AP] et [OR] sont des médianes de ABR leur intersection M est le centre de gravité de ABR.
- O et P sont les milieux des côtés [AB] et [RB] du triangle ABR, donc OP = AR / 2.
- AS = OP et OP = AR / 2 donc AS = AR / 2.
- S est sur [AR] et AS = AR/2 donc S est le milieu de [AR].
- S est le milieu de [AR] donc [BS] est une médiane de ABR.
- [BS] est une médiane de ABR et M en est le centre de gravité, donc les points B, M et S sont alignés.

10. M et R sont deux points du cercle de diamètre [AB].
C est le milieu de [AB].
(AM) coupe le cercle de diamètre [AC] en A et en N.
(AR) coupe le cercle de diamètre [AC] en A et en S.
Démontrer que (MR) // (NS).

- M est sur le cercle de diamètre [AB] donc AMB est rectangle en M, par conséquent (BM) est perpendiculaire à (AM)
- N est sur le cercle de diamètre [AC] donc ANC est rectangle en N, par conséquent (CN) est perpendiculaire à (AN)
- Les droites (AM) et (AN) sont confondues, les droites (BM) et (CN) sont donc toutes deux perpendiculaires à (AM) donc (BM) // (CN)
- Dans le triangle ABM, la droite (CN) passe par le milieu de [AB] et est parallèle à (BM), donc elle passe par le milieu de [AM]. Par conséquent N est le milieu de [AM].
- On montre de la même façon que S est le milieu de [AR].
- Dans le triangle AMR, la droite (NS) passe par les milieux des côtés [AR] et [AM] donc elle est parralèle au troisième côté, [MR].