Problème n°1

On lance successivement deux dés ordinaires.

Quelle est la probabilité pour que la différence entre les valeurs des deux dés soit égale à deux ?

Remarque : la différence dont il est question ici n'est pas une différence algébrique, elle est calculée en soustrayant la plus petite valeur à la plus grande. Ainsi, elle est de 1 si on tire 5 puis 4 et elle est également de 1 si on tire 4 puis 5.

Corrigé du problème n° 1

Le tableau ci-dessous, dans lequel les nombres en abscisse et en ordonnées sont les valeurs tirées avec chacun des deux dés montre tous les tirages possibles.

Les cases où apparait le mot «vrai» correspondent aux issues favorables (la différence entre les deux valeurs tirées est de 2).

Il y en a 8 sur 36 en tout, la probabilité cherchée est donc égale à $\frac{8}{36}$ ou $\frac{2}{9}$

	1	2	3	4	5	6
1			VRAI			
2				VRAI		
3	VRAI				VRAI	
4		VRAI				VRAI
5			VRAI			
6				VRAI		

Rappel : la présentation en arborescence est souvent proposée pour calculer les probabilités. Elle présente l'avantage d'être aisément adaptable si on utilise trois ou quatre tirages et non deux.
En revanche, s'il n'y a que deux tirages, le tableau est probablement plus rapide à dresser et présente de surcroit l'avantage de pouvoir être réalisé sur un tableur et rempli automatiquement.

Problème n°2

On a reproduit ci-dessus le tableau utilisé pour répondre au problème 1.

Proposer une formule pouvant être inscrite dans la cellule B2 puis recopiée vers la droite et vers le bas afin d'obtenir ce tableau.

	A	B	C	D	E
1		**1**	**2**	**3**	**4**
2	**1**	non	oui	oui	oui
3	**2**	non	non	oui	oui
4	**3**	non	non	non	oui
5	**4**	non	non	non	non

Cette question va au-delà des compétences attendues pour le CRPE dans l'usage du tableur. En effet, l'usage de la fonction «SI» est indispensable.

À titre d'exemple, le tableau ci-dessous a été réalisé en entrant dans la cellule B2 la formule =SI(B$1>$A2; "oui";"non") puis en la recopiant en tirant vers la droite et vers le bas.

Les parenthèses qui suivent la fonction «SI» comportent trois zones séparées par des points-virgules :

La première zone comporte une affirmation, qui peut être vraie ou fausse. Dans notre exemple, la valeur de la cellule désignée par B$1 peut être plus grande que celle contenue dans $A2 ou non.

La deuxième zone comporte ce qui sera inscrit si l'affirmation précédente est vraie.

La troisième zone comporte ce qui sera inscrit si l'affirmation précédente est fausse (cette troisième zone est facultative).

Nous vous conseillons vivement d'essayer de traiter cette question à l'aide d'un tableur, afin de constater l'effet des modifications que vous apporterez à votre formule.

Corrigé du problème n° 2

Comme toujours, il y a de nombreuses façons d'obtenir le résultat souhaité.

Une des difficultés est que, si on fait calculer la différence entre la valeur située en abscice et celle en ordonnée, on doit faire afficher le mot «vrai» que cette valeur soit 2 ou -2.

Parmi les façons de résoudre cette difficulté, certaines demandent des connaissances mathématiques (et sur le tableur) qui excèdent le programme du CRPE.

On peut par exemple utiliser la fonction ABS() qui calcule la valeur absolue d'un nombre, c'est à dire sa valeur sans tenir compte du signe :

ABS(3) et ABS(-3) sont égaux à 3. Une formule possible est alors :

=SI(ABS(B$1-$A2)=2;"VRAI";"")

On peut aussi utiliser la fonction OU et demander d'afficher le mot «vrai» quand la différence est égale à 2 ou à -2. Une formule possible est alors :

=SI(OU(B$1-$A2=2;$A2-B$1=2);"VRAI";"")

On peut aussi n'utiliser que des connaissances relevant du programme du CRPE en ne faisant pas calculer la différence entre les deux valeurs, mais le carré de cette différence. Dire que la différence est égale à 2 ou à -2 revient à dire que le carré de la différence est égal à 4. Une formule possible est alors :

=SI((B$1-$A2)*(B$1-$A2)=4;"VRAI";"")

Concernant l'utilisation du signe $, qui impose une interprétation absolue du numéro de la ligne ou de la lettre désignant la colonne, si vous avez une hésitation, nous vous suggérons la méthode suivante :

•Écrivez la formule que vous avez trouvée dans la case initiale, sans tenir compte des signes $.
•Écrivez dans une autre cellule de la zone de recopie (par exemple en C10 ou en E9) la formule que vous y placeriez si vous décidiez d'écrire chaque formule manuellement, sans recourir à la recopie en tirant.
•Comparez alors vos deux formules si «A8» écrit dans la formule de la cellule B8 est devenu «B8» dans la cellule C10, c'est que la colonne de la cellule de référence doit changer, il ne faut donc pas mettre de «$» devant le A. En revanche, le 8 désignant la ligne n'a pas changé, il faut donc écrire «$8» pour obtenir le même effet lors de la copie en tirant.

Problème n°3

On considère un carré ABCD, et quatre triangles ABR, BCS, CDT et DAU respectant les conditions suivantes :

Les points R, S, T et U sont extérieurs au carré.

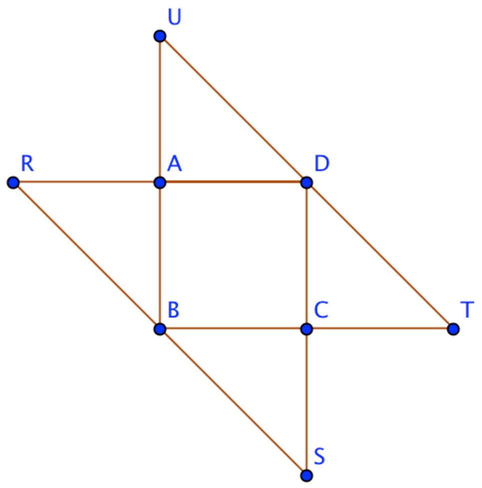
Les triangles ABR et BCS n'ont en commun que le point B. De même, BCS et CDT n'ont que C en commun, CDT et DAU n'ont que D en commun, DAU et ABR n'ont que A en commun.

Les égalités de longueur suivantes sont vérifiées : BR = BS ; CS = CT ;
DT = DU ; AU = AR.

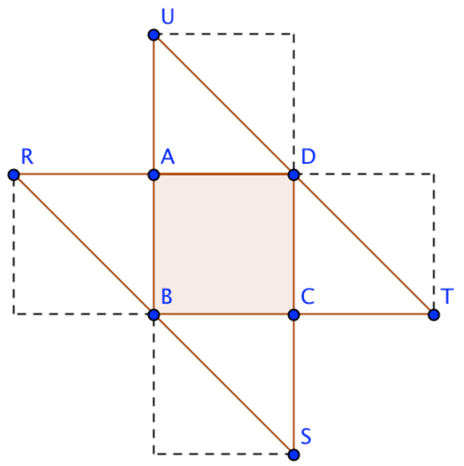
Ces conditions permettent-elles d'affirmer que la figure formée par le carré et les quatre triangles constitue un patron d'une pyramide ?

La réponse sera justifiée.

Corrigé du problème n° 3



Les conditions citées ne sont pas suffisantes, la figure ci-dessus, qui les respecte, n'est cependant pas un patron de pyramide.



Si vous ne parvenez pas à voir ce qui pose problème, complétez la figure comme ci-dessus. Imaginez que le carré ABCD est fixé sur la table et que l'on replie les autres carrés, comme s'il s'agissait d'un patron de cube incomplet (il manque le «couvercle»).

L'assemblage des triangles ABR et ADU d'une part, BCS et CDT d'autre part, s'effectue de la même façon… ce qui ne réalise en rien une pyramide, mais une partie du cube.

De très nombreux autres contre-exemples étaient possibles, ce sont plutôt les figures permettant d'obtenir une pyramide qui font figure d'exception.

Problème n°4

Le produit de 1 000 000 000 000 450 par 999 999 999 999 550 est-il plus grand ou plus petit que 10^{30} ?

On justifiera la réponse sans utiliser de calculatrice et sans poser effectivement la multiplication.

Corrigé du problème n° 4

Le produit étudié peut s'écrire sous la forme $\left(10^{15}+450\right) \times \left(10^{15}-450\right)$

Il est donc égal à $10^{15} \times 10^{15} - 450^2$, ce qu'on trouve en utilisant l'identité remarquable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Le produit est donc égal à $10^{30} - 450^2$, il est inférieur à 10^{30}.

Problème n°5

Le nombre $1,01^{250}$ est proche de 12.

Pour la suite de cet exercice, on considérera que $1,01^{250} = 12$.

En considérant que la population mondiale était de 6 milliards d'habitants en l'an 2000, et en supposant qu'elle augmente régulièrement au rythme de 1% par an, calculer la population mondiale en l'an 3000.

Corrigé du problème n°5

Si la population mondiale s’accroit de 1% chaque année, cela revient à dire qu’elle est multipliée par 1,01 chaque année.

Quand 250 ans se sont écoulés, elle a été multipliée par $1{,}01^{250}$, soit par 12 selon les hypothèses de l’exercice.

En 1000 ans, la population serait donc multipliée 4 fois successivement par 12, elle atteindrait donc en l’an 3000 la valeur de 6 x 12 x 12 x 12 x 12 milliards soit 124 416 milliards d’individus… ce qui risquerait de poser quelques problèmes.

Problème n°6

Le reste de la division euclidienne du nombre entier A par 20 est 7.

Le reste de la division euclidienne du nombre entier B par 30 est 3.

Quel est le reste de la division euclidienne de A x B par 10 ?

Corrigé du problème n°6

Le reste de la division euclidienne du nombre entier A par 20 est 7, son chiffre des unités est donc 7.

Le reste de la division euclidienne du nombre entier B par 30 est 3, son chiffre des unités est donc 3.

Quand on pose la multiplication de A par B, le chiffre des unités du produit est le chiffre des unités de 7x3, c'est 1.

Le chiffre des unités de A x B est 1, c'est aussi le reste de la division euclidienne de A x B par 10.

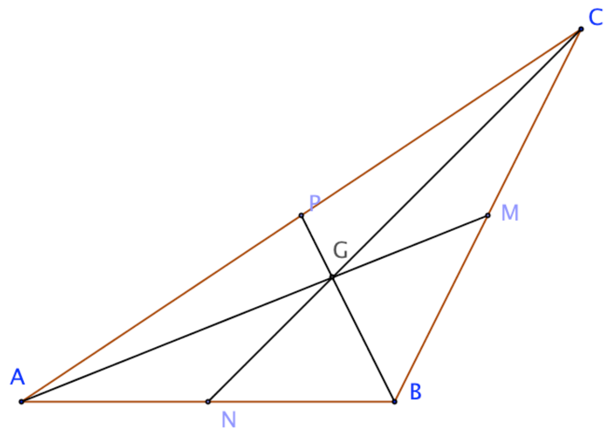
On peut aussi raisonner en écrivant A sous la forme $20a+7$ (a étant un entier) et B sous la forme $30b+3$ (avec b entier) puis développer le produit et mettre en facteur 10 partout où c'est possible…ce qui nous semble bien compliqué en l'occurrence.

Problème n°7

Les trois médianes d'un triangle partagent celui-ci en six triangles.

Démontrer que les aires de ces six triangles sont égales.

Corrigé du problème n°7



On utilisera pour la démonstration les noms indiqués par la figure ci-dessus.

[AM] [BP] et [CN] étant des médianes de ABC, elles ont un point commun, centre de gravité du triangle ABC, noté G. Le triangle ABC est donc bien partagé en six petits triangles, comme le suggère la figure et comme l'affirme l'énoncé.

Les triangles ANG et BNG ont des aires égales, car leurs côtés [AN] et [NB] ont la même longueur et les hauteurs issues du sommet G sont confondues. Notons a la mesure de l'aire commune à ces deux triangles.

De même, les triangles BMG et CMG ont une aire commune (dont la mesure sera notée b), CPG et APG ont une aire commune (dont la mesure sera notée c).

Les triangles ANC et BNC ont également une aire commune (AN = NB et les hauteurs issues de C sont confondues). Il en résulte que $a+2c = a+2b$, donc que $b = c$.

Les triangles BMA et CMA ont également une aire commune (BM = MC et les hauteurs issues de A sont confondues). Il en résulte que $b+2a = b+2c$, donc que $a = c$.

Comme $a = c$ et $b = c$, les nombres a, b et c sont égaux, donc les 6 petits triangles ont des aires égales.

Problème n°8

On considère un triangle ABC et les cercles de diamètres respectifs [AB] et [AC].

Ces deux cercles ont en commun le point A et un autre point qu'on nomme F.

Démontrer que le point F appartient à la droite (BC).

Corrigé du problème n°8

Soit H le deuxième point commun aux cercles de diamètres respectifs [AB] et [AC]

H est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AHB est rectangle en H, il en résulte que les droites (AH) et (BH) sont perpendiculaires.

H est sur le cercle de diamètre [AC] donc le triangle AHC est rectangle en H, il en résulte que les droites (AH) et (CH) sont perpendiculaires.

Les droites (BH) et (CH) sont perpendiculaires à (AH), elles sont donc parallèles entre elles.

(BH) et (CH) sont parallèles et ont en commun le point H, elles sont donc confondues. Il en résulte que le point H est sur la droite (BC).

Problème n°9

On considère les fractions dont la somme du numérateur et du dénominateur est égale à 100.

Parmi ces fractions, combien y en a-t-il qui sont à la fois supérieures à 5 et inférieures à 6 ?

Corrigé du problème n°9

Soit n le numérateur d'une de ces fractions, son dénominateur est égal à 100 - n.

La fraction est supérieure à 5, $\frac{n}{100-n} > 5$, on en déduit successivement que

$n > 500 - 5n$; $6n > 500$; $n > \frac{500}{6}$; $n > 83 + \frac{2}{6}$

La fraction est inférieure à 6, $\frac{n}{100-n} < 6$ dont on déduit successivement que

$n < 600 - 6n$; $7n < 600$; $n < \frac{600}{7}$; $n < 85 + \frac{5}{7}$

Il résulte des points précédents que les valeurs possibles du numérateur sont 84 et 85.

Vérification : $\frac{84}{16} = \frac{80}{16} + \frac{4}{16} = 5 + \frac{4}{16}$; $\frac{85}{15} = \frac{75}{15} + \frac{10}{15} = 5 + \frac{10}{15}$

Parmi les fractions étudiées, il y en a donc deux qui sont comprises entre 5 et 6.

Autre méthode :

Ecrivons les fractions étudiées par ordre croissant de numérateur :

$\frac{0}{100}$; $\frac{1}{99}$; $\frac{2}{98}$ … Elles sont ainsi rangées par ordre croissant puisque pour passer d'une fraction à la suivante, on augmente le numérateur, ce qui augmente la valeur de la fraction, et on diminue son dénominateur, ce qui augmente également la valeur de la fraction.

On peut alors procéder par essais successifs.

$\frac{80}{20} = 4$ $\frac{81}{19} = \frac{76}{19} + \frac{5}{19} = 4 + \frac{5}{19}$ $\frac{82}{18} = \frac{72}{18} + \frac{10}{18} = 4 + \frac{10}{18}$ $\frac{83}{17} = \frac{68}{17} + \frac{15}{17} = 4 + \frac{15}{17}$

$\frac{84}{16} = \frac{80}{16} + \frac{4}{16} = 5 + \frac{4}{16}$ $\frac{85}{15} = \frac{75}{15} + \frac{10}{15} = 5 + \frac{10}{15}$ $\frac{86}{14} = \frac{84}{14} + \frac{2}{14} = 6 + \frac{2}{14}$

Comme les fractions sont rangées par ordre croissant, il n'y en a donc que deux qui sont comprises entre 5 et 6.

Problème n°10

On fabrique pour des enfants de petite section de maternelle une plaque comportant des empreintes creuses dans lesquelles peuvent se placer des pièces mobiles de la même forme.

On considère ici que l'empreinte creuse et la pièce qu'on y place ont exactement les mêmes dimensions (dans la réalité, un léger jeu est nécessaire).

Sur cette plaque, les trois empreintes suivantes ont déjà été réalisées :

Un carré de 4 cm de côté.

Un triangle isocèle rectangle dont l'hypoténuse mesure 8 cm.

Un losange dont les diagonales mesurent respectivement 5 cm et 6,4 cm.

Indiquer un critère simple que doivent respecter les autres empreintes (qui seront toutes différentes) afin qu'aucune pièce ne puisse être placée dans une autre empreinte que la sienne.

Corrigé du problème n°10

On remarquera peut-être en étudiant les figures proposées pour les trois permières empreintes que leurs aires sont égales (elles mesurent toutes 16 centimètre carrés).

Cette remarque fournit le critère cherché : si on utilise des figures différentes mais ayant toutes la même aire, il est impossible qu'une pièce entre dans une autre empreinte que la sienne, car cela impliquerait que l'aire de la pièce soit inférieure à l'aire de l'empreinte.