Problème n°11

On écrit la suite des nombres entiers, à partir de 1.

Dans quel nombre écrira-t-on le deux-cent-unième chiffre 2 ?

Corrigé du problème n°11

Parmi les nombres inférieurs à 100, on écrit le chiffre 2 dix fois au rang des unités (dans 2, 12, 22… 92) et dix fois au rang des dizaines (dans 20, 21, 22…), le chiffre 2 est donc écrit 20 fois en tout.

Il en est de même dans chacune des centaines. Dans la centaine de 200 à 299, le chiffre 2 est de plus utilisé 100 fois au rang des centaines, une fois pour chaque nombre.

Récapitulons :

nombres écrits	combien de 2 dans cette tranche ?	combien de 2 en tout ?
1 à 99	20	20
100 à 199	20	40
200 à 299	120	160
300 à 399	20	180
400 à 499	20	200

Le deux-cent-unième chiffre 2 sera donc le premier qu'on devra écrire après 499, c'est celui qu'on utilise pour écrire le nombre 502.

Problème n°12

Deux cyclistes partent du même point, dans la même direction.

Le premier cycliste démarre à 9 h 17, il roule à la vitesse constante de 27 km/h.

Le deuxième cycliste démarre à 9 h 23, il roule à la vitesse constante de 30 km/h.

A quelle heure le second cycliste rattrapera-t-il le premier ?

Corrigé du problème n°12

Quand le deuxième cycliste démarre, le premier a roulé pendant 6 minutes, soit un dixième d'heure. Il a donc une avance d'un dixième de 27 km, soit 2,7km ou.

La vitesse du deuxième cycliste est supérieure de 3 km/h à celle du premier.

Or 2700 m, c'est neuf dixièmes de 3 km, il lui faut donc neuf dixièmes d'heure pour rattraper son retard, soit 54 minutes.

Le deuxième cycliste rattrapera donc le premier 54 minutes après 9 h 23, soit à 10 h 17 min.

Remarque : de nombreuses autres méthodes sont possibles.

On peut par exemple remarquer que le second cycliste regagne 3000 m en 60 min, donc 1000 m en 20 min et 100 m en 2 min.

Comme il doit rattraper 2700 m, soit 27 fois 100 m, il a besoin pour cela de 27 fois 2 minutes.

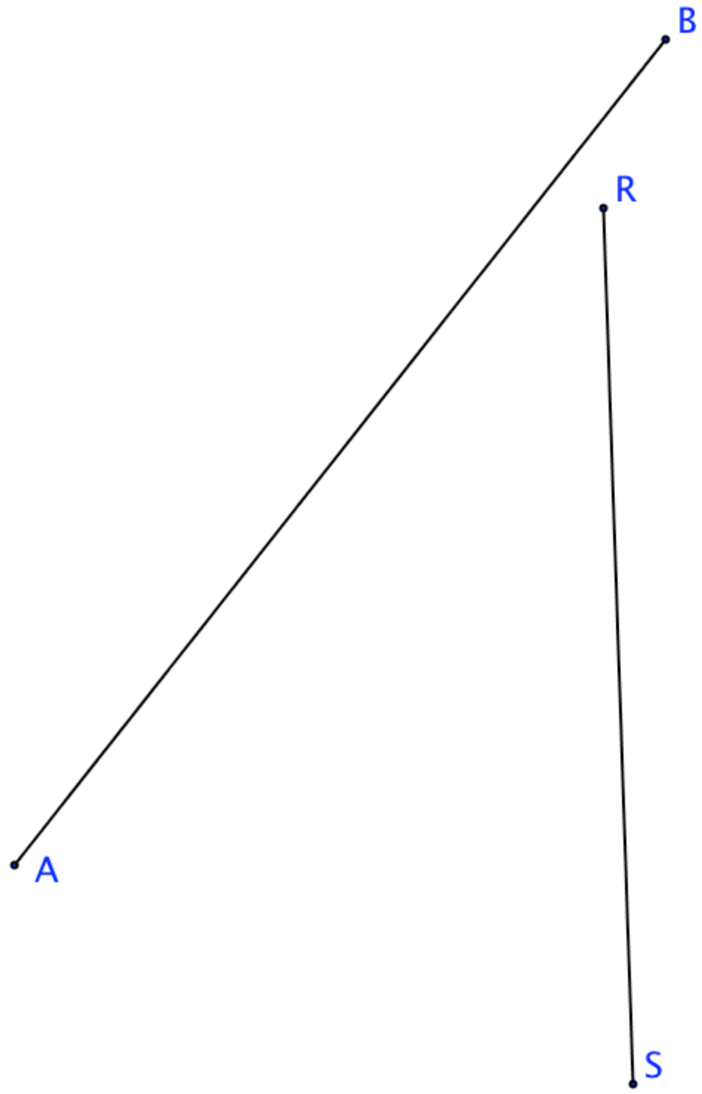
Problème n°13

ABCD et RSTU sont deux losanges ayant le même centre O.

La figure suivante montre un côté de chacun des deux losanges.

En utilisant exclusivement la règle non graduée et le compas, construire le point O.

Si plusieurs positions sont possibles pour le point O, on les indiquera toutes.



Corrigé du problème n°13

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

Il en résulte que le triangle AOB est rectangle et que le point O est donc situé sur le cercle de diamètre [AB].

De même, le point O est situé sur le cercle de diamètre [RS].

O est donc situé à l'une des deux intersections de ces deux cercles, qu'il suffit de construire.

Remarque :

La construction des losanges n'est pas demandée, mais ne présente pas de difficulté une fois que O est placé. Pour le losange ABCD, C est le symétrique de A par rapport à O, D est le symétrique de B par rapport à O.

Problème n°14

Combien y a-t-il de nombre entiers inférieurs à 1000 dont le produit des chiffres est égal à 36 ?

Corrigé du problème n°14

36 = 2 x 2 x 3 x 3.

Ecrivons toutes les décompositions possibles de 36 en un produit de deux entiers, puis en un produit de 3 entiers.

Pour garantir l'exhaustivité, nous prenons systématiquement tous les diviseurs de 36 comme premier nombre du produit, par ordre croissant.

Pour éviter des doublons, nous écrivons systématiquement les nombres du produit dans l'ordre croissant.

1 x 36 2 x 18 3 x 12 **4 x 9** **6 x 6**

1 x 1 x 36 1 x 2 x 18 1 x 3 x 12 **1 x 4 x 9** **1 x 6 x 6**

2 x 2 x 9 **2 x 3 x 6** **3 x 3 x 4**

Seuls les produits écrits en gras conduisent à des solutions :

49 94 66 sont les seuls nombres à deux chiffres qui conviennent.

Pour les nombres à trois chiffres :

Quand deux chiffres sont égaux, il y a trois nombres possibles (exemple : avec 1, 6 et 6 on peut écrire 166, 616 et 661).

Quand les trois chiffres sont différents, on peut écrire 6 nombres (trois choix pour le premier chiffre et, pour chacun d'entre eux, deux choix pour le deuxième chiffre).

Par exemple, avec 1,4 et 9 on peut écrire 149, 194, 419, 491, 914 et 941.

en tout il y a donc 3 + 3 x 3 + 2 x 6 soit 24 nombres entiers inférieurs à 1000 dont le produit des chiffres est égal à 36.

Problème n°15

L'aire d'une feuille de papier de format A0 est de un mètre carré.

Le format A1 est obtenu en découpant en deux parties égales une feuille A0, le format A2 est obtenu en découpant en deux parties égales une feuille A1 et ainsi de suite pour les formats A3, A4, A5…

On dispose d'une enveloppe timbrée pesant 12 g, dans laquelle on place des feuilles de format A5 d'un papier pesant 70 grammes par mètre carré.

Quel est le nombre maximum de feuilles que l'on peut placer dans l'enveloppe sans dépasser la masse totale de 50 g pour l'enveloppe et son contenu ?

Corrigé du problème n°15

La masse d'une feuille de papier (supposée homogène) est proportionnelle à son aire.

Une feuille de format A0 pèse 70g, les formats suivants pèsent donc respectivement :

35g pour une feuille A1 soit 16 feuilles A5

17,5g pour une feuille A2 soit 8 feuilles A5

8,75g pour une feuille A3 soit 4 feuilles A5

4,375g pour une feuille A4 soit 2 feuilles A5

2,1875g pour une feuille A5.

L'enveloppe timbrée pesant 12 g, les feuilles ne doivent pas peser plus de 38 g.

Les résultats précédents montrent qu'on peut mettre une feuille A1, soit 16 feuilles A5.

Il reste encore 3 grammes utilisables, on peut donc placer une feuille A5 supplémentaire, mais pas deux.

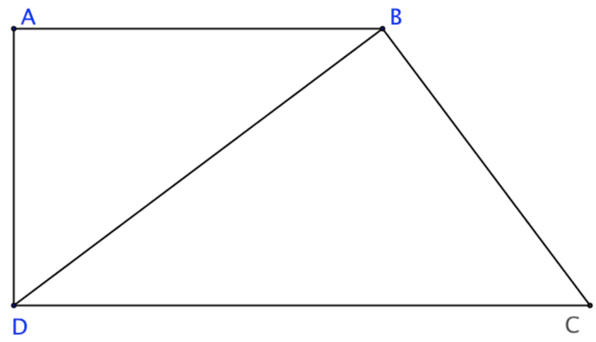
On peut donc au maximum placer au maximum 17 feuilles A5 dans l'enveloppe sans dépasser la masse totale de 50 g.

Problème n°16

ABCD est un quadrilatère non croisé ayant les propriétés suivantes :
AB = 4 cm.
AD = 3 cm.
L'angle de sommet A et l'angle de sommet D sont droits.
L'angle $\widehat{DBC}$ est également droit.

Calculer la longueur DC.

Corrigé du problème n°16



Le triangle ABD est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent respectivement 3 cm et 4 cm, son hypoténuse mesure donc 5 cm. (ce résultat peut être mémorisé, il peut également être retrouvé à l'aide du théorème de Pythagore).

ABD est rectangle, ses angles aigus sont complémentaires.

On a donc, l'unité de mesure étant le degré : $\widehat{ABD} = 90 - \widehat{ADB}$.

Par ailleurs, on a également $\widehat{BDC} = 90 - \widehat{ADB}$.

On déduit des deux égalités précédentes que les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux.

On a donc $\cos \widehat{ABD} = \cos \widehat{BDC}$

or, dans le triangle rectangle ABD, $\cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{4}{5}$

d'autre part, dans le triangle rectangle BCD, $\cos \widehat{BDC} = \frac{BD}{DC} = \frac{5}{DC}$

On en déduit que $\frac{4}{5} = \frac{5}{DC}$ donc que 4 DC = 25 et que DC = 6,25

La longueur DC est donc de 6,25 cm.

Comme souvent, d'autres méthodes sont possibles.
On peut par exemple montrer que deux angles sont égaux parce que ce sont des angles alternes internes entre deux droites parallèles.
On peut aussi utiliser le fait que deux triangles rectangles ayant un angle aigu égal sont «de la même forme», l'un des deux est un agrandissement de l'autre. On raisonne alors à partir du coefficient d'agrandissement, ce qui dispense d'utiliser la trigonométrie.

Problème n°17

Un nombre entier A s’écrit avec trois chiffres.
Soit B le nombre obtenu en inversant l’ordre des chiffres.

La somme des chiffres de A est égale à 15.
B = A + 297.

Déterminer A (si plusieurs valeurs sont possibles, on les donnera toutes).

Corrigé du problème n°17

Notons respectivement c, d et u les chiffres des centaines, dizaines et unités du nombre A.
A = 100c + 10d + u, et B = 100u + 10d + c
or B - A = 297, on a donc (100u + 10d + c) - (100c + 10d + u) = 297
soit 99u - 99c = 297 ou encore 99 (u-c) = 297 c'est-à-dire u - c = 3 ou u = c + 3.

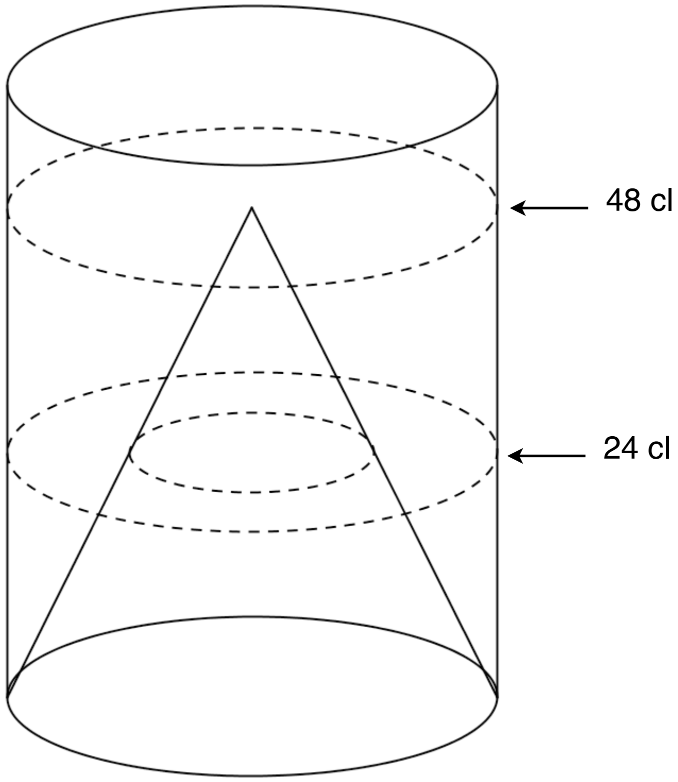
On peut alors essayer systématiquement toutes les valeurs possibles pour c (de 1 à 9 puisqu'il représente le chiffre des unités de A), en déduire u en utilisant l'égalité
u = c+ 3 puis calculer d en utilisant le fait que c+d+u = 15.

valeur de c	valeur de u	valeur de d
1	4	10
2	**5**	**8**
3	**6**	**6**
4	**7**	**4**
5	**8**	**2**
6	**9**	**0**
7	10	-2
8	11	-4
9	12	-6

Le tableau ci-dessus résume les résultats ainsi trouvés, seules les lignes en gras fournissent des valeurs compatibles avec le fait que c, d et u sont les chiffres du nombre A.

A peut donc valoir 285, 366, 447, 528 ou 609.

Problème n°18



Dans un récipient gradué de forme cylindrique, on a placé un cône. La base de ce cône coïncide avec celle du récipient.
Le sommet du cône est au niveau de la graduation indiquant 48 cl.
On verse ensuite de l'eau dans le récipient jusqu'à ce qu'elle atteigne la graduation indiquant 24 cl.
Quel volume d'eau a-t-on versé dans le récipient ?

Indication : on admettra que la partie émergée du cône est une réduction du cône posé dans le récipient gradué.

Corrigé du problème n°18

Le volume d'un cône est le tiers du volume du cylindre ayant même base et même hauteur, le cône placé dans le cylindre a donc un volume de 16 cl.

Le récipient étant cylindrique, la hauteur correspondant à la graduation 48 cl est le double de celle correspondant à la graduation 24 cl.

La hauteur située entre ces deux graduations (celle du petit cône) est donc la moitié de la hauteur correspondant à la graduation 48 cl (celle du grand cône).

Le coefficient de la réduction qui fait passer du grand cône au petit est donc 1/2. Dans cette réduction, le volume est donc multiplié par le cube de 1/2, c'est à dire par 1/8. Il en résulte que le petit cône à un volume de 2 cl, et la partie immergée du grand cône un volume de 16 cl - 2 cl soit 14 cl.

Le liquide monte jusqu'à la graduation 24 cl, mais 14 cl sont occupés par la partie immergée du cône, on a donc versé 24 cl - 14 cl soit 10 cl de liquide.

Problème n°19

Un maître de cycle 3 veut illustrer pour ses élèves la quantité «un million».
Pour cela, il envisage de placer sur le sol des feuilles quadrillées (carreaux de 5 mm de côté) découpées dans des cahiers de 96 pages de format 20 cm x 30 cm.
On considère que les bords des feuilles de cahier coïncident avec les côtés de petits carreaux.
Combien de cahiers le maître devra-t-il utiliser pour constituer une surface en papier contenant un million de carreaux ?

Corrigé du problème n°19

Chaque page des cahiers utilisés contient 40 x 60 soit 2 400 petits carreaux.
En posant la division euclidienne de 1 000 000 par 2 400, on obtient un quotient de 416 et un reste de 1600, il faudra donc utiliser 417 pages au minimum pour montrer un million de carreaux.

Les feuilles étant posées sur le sol, on ne peut pas voir à la fois le recto et le verso, il faudra donc utiliser 417 feuilles différentes pour montrer un million de carreaux.

Un cahier de 96 pages compte 48 feuilles.
La division euclidienne de 417 par 48 a pour quotient 8 et pour reste 33, il faudra donc utiliser 9 cahiers pour montrer un million de carreaux.

Problème n°20

Un spéculateur a acheté des actions.

Chaque jour suivant son achat le cours de ses actions varie (le lendemain de l'achat est considéré comme le jour numéro 1).
Les jours impairs, il augmente de 50 %
Les jours pairs, il diminue de 40 %

Le spéculateur a décidé qu'il achèterait d'autres actions si le cours a baissé d'un tiers (ou plus) par rapport au prix d'achat, et qu'il vendrait si le cours a augmenté de deux tiers (ou plus).

Quel est le numéro du jour où il agit ? Doit-il alors vendre ou acheter ?

Corrigé du problème n°20

Une augmentation de 50 % correspond à une multiplication par 1,5.
Une diminution de 40 % correspond à une multiplication par 0,6.

En deux jours consécutifs, le cours des actions est donc multiplié par 1,5 x 0,6 soit 0,9 ce qui est une diminution.
Le cours de l'action sera donc inférieur au cours d'achat tous les jours pairs, et inférieur au cours du jour 1 tous les jours impairs, par conséquent l'augmentation de deux tiers n'aura jamais lieu.
Nous allons donc chercher quand une diminution de plus d'un tiers peut avoir lieu pour la première fois (si cela se produit, ce sera nécessairement un jour pair, car le cours des jours impairs est supérieur à celui de la veille).
Il suffit donc de multiplier le cours initial par 0,9 plusieurs fois de suite.

numéro du jour	0	2	4	6	8
cours (indice 1 le jour de l'achat)	1	0,9	0,81	0,729	0,6561

Ce tableau montre qu'au jour 8 le cours des actions est inférieur aux deux tiers du cours initial, il a diminué de plus d'un tiers, le spéculateur va donc acheter.