Problème n°21

Calculer, en heures, minutes et secondes, la durée nécessaire pour parcourir 53 km à la vitesse constante de 40 km/h.

Corrigé du problème n°21

A 40 km/h, on parcourt 10 kilomètres en 15 minutes, donc 1 kilomètre en 1,5 minutes, ou une minute et 30 secondes.

Pour parcourir 53 km, la durée nécessaire est la somme des durées pour parcourir 40 km, 10 km, et 3 km.

C'est donc 1 h + 15 min + 3 x (1 min + 30 s) soit 1h 19 min 30 s.

Autre démarche :

Pour une distance constante, la durée du trajet est inversement proportionnelle à la vitesse (ce qui signifie que si la vitesse est multipliée par un nombre, la durée est multipliée par l'inverse de ce nombre).
à 60 km/h, il faut 53 minutes pour parcourir 53 km.
Pour passer de 60 km/ à 40 km/h, la vitesse est multipliée par 2/3, la durée sera donc multipliée par 3/2.
La durée nécessaire est donc égale à 53 minutes plus la moitié de 53 minutes, soit 53 minutes plus 26 minutes 30 secondes, c'est-à-dire 1 h 19 min 30 s.

De nombreuses autres démarches de calcul réfléchi sont bien entendu possibles.

Problème n°22

On fabrique un pavé droit plein en assemblant 385 petits cubes identiques.
Si on prend comme unité de longueur la longueur de l'arête d'un petit cube, toutes les arêtes du pavé ont une mesure supérieure à 1 (autrement dit, le pavé n'est pas réduit à une file de petits cubes ni à une plaque d'un petit cube d'épaisseur).

Quelles sont les dimensions de ce pavé ?

Corrigé du problème n°22

Décomposons le nombre 385 en facteurs premiers : 385 = 5 x 7 x 11.

Le nombre de cubes contenu dans le pavé est le produit de ses trois dimensions, si aucune dimension n’est égale à 1, elles ne peuvent être que 5, 7 et 11.

Problème n°23

On peint en rouge toutes les arêtes du pavé du problème précédent.
Combien de petits cubes ont-ils reçu de la peinture ?

On peint maintenant en bleu toutes les faces du pavé précédent.
Combien de petits cubes ont-ils reçu de la peinture ?

Corrigé du problème n°23

Si on peint toutes les arêtes du pavé, la longueur totale peinte est de (l'unité étant la longueur de l'arête d'un petit cube) 4 x 5 + 4 x 7 + 4 x 11 soit 92.

La plupart des petits cubes qui reçoivent de la peinture n'en reçoivent que sur une de leurs arêtes, à l'exception de ceux situés aux sommets du pavé qui en reçoivent sur trois arêtes.
8 cubes reçoivent donc de la peinture sur 3 arêtes, ce qui fait 24 arêtes peintes.

Il y a donc 92 - 24 = 68 cubes qui reçoivent de la peinture sur une seule arête.

Au total, 76 cubes reçoivent de la peinture.

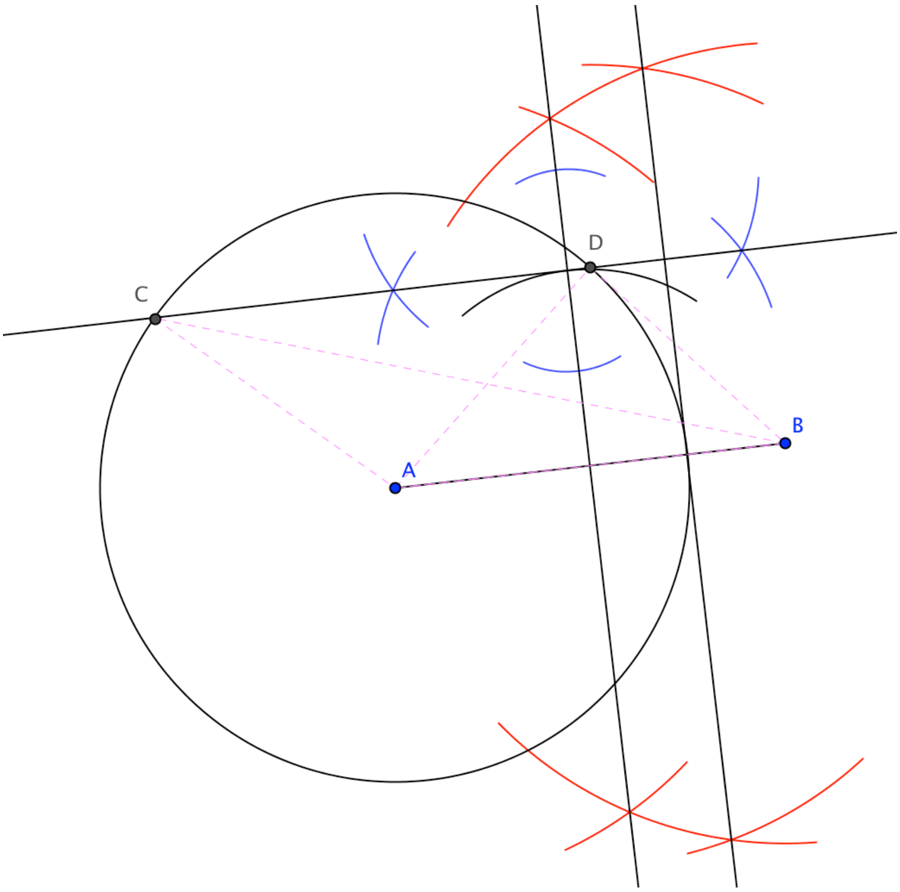
Si on peint toutes les faces du pavé, en retirant la couche externe des petits cubes peints, on obtient un pavé dont les dimensions sont 3, 5 et 9.
Ce pavé central est formé de 3 x 5 x 9 cubes, soit 135 cubes.

Le nombre de cubes ayant reçu de la peinture est donc 385 - 135, soit 250.

Problème n°24

Tracer à la règle graduée un segment [AB] de longueur 8 cm puis, en utilisant exclusivement le compas et la règle non graduée, construire deux triangles ABC et ABD non superposables ayant tous les deux un côté de 6 cm et une aire de 16 cm^2.

Corrigé du problème n°24



Voici une construction possible (en réduction).

Deux idées ont présidé sa réalisation :

Obtenir des longueurs de 6 cm et 4 cm à partir de [AB] en traçant successivement deux médiatrices.

Tracer une parallèle à (AB) distante de 4 cm, car pour que l'aire des triangles ABC et ABD mesure 16 cm^2, la hauteur relative à [AB] doit mesurer 4 cm.

Il n'était pas demandé d'obtenir tous les triangles répondant à la question, les points C et D peuvent aussi être placés symétriquement de ceux que nous avons choisis par rapport à la droite (AB), et/ou symétriquement par rapport à la médiatrice de (AB) (ce sont alors les côtés [BC] ou [BD] qui mesurent 6 cm.

Problème n°25

Combien y a-t-il de nombres entiers compris entre 1 et 10 000 qui sont à la fois multiples de 81 et de 144 ?

Corrigé du problème n°25

81 = 3 x 3 x 3 x 3
144 = 2 x 2 x2 x 2 x 3 x 3

Un nombre entier est multiple de 81 et de 144 si sa décomposition en facteurs premiers contient tous les facteurs premiers de 81 et si elle contient tous les facteurs de 144.

La décomposition en facteurs premiers d'un tel multiple contient donc au moins quatre facteurs 2 et quatre facteurs 3.
Un tel nombre est donc de la forme 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 3 x 3 x k, où k est un entier, soit 1296 k.

Le raisonnement qui précède revient à expliquer que les multiples communs à 81 et 144 sont les multiples de leur ppcm, résultat qui peut être rappelé et utilisé sans autre justification s'il est connu.

7 x 1296 = 9072 est inférieur à 10 000, mais 8 x 1296 est supérieur à 10 000.
Il y a donc 7 nombres entiers qui répondent à la question (de 1 x 1296 à 7 x 1296).

Problème n°26

	A	B	C	D
1		**1**	**2**	**3**
2	**1**	*1*	*2*	*6*
3	**2**	*2*	*4*	*24*
4	**3**	*6*	*24*	*576*
5				

Sans modifier les nombres écrits en gras dans la ligne 1 et dans la colonne A de cette feuille de calcul, quelle formule peut-on écrire dans la cellule B2 puis recopier vers le bas et vers la droite pour obtenir les résultats indiqués ci-dessus ?

Comment peut-on modifier cette formule pour obtenir une table de multiplication ?

Corrigé du problème n°26

On remarque que chaque nombre de la zone à calculer est obtenu en multipliant celui de la cellule située juste au dessus dans la même colonne par celui de la cellule située juste à gauche sur la même ligne.

On peut donc inscrire dans la cellule B2 la formule suivante puis la recopier.

=A2*B1

Pour transformer ce tableau en une table de multiplication, il faut dans chaque cellule multiplier le nombre situé dans la colonne A et sur la même ligne par le nombre situé dans la même colonne et sur la ligne 1.

Nous avons choisi ici d'écrire en bleu les expressions relatives à la cellule qu'on calcule et en rouge les expressions absolues.
La syntaxe des tableurs impose que, quand on recopie une cellule en tirant, les coordonnées soient interprétées de manière relative, sauf si on place un signe $ devant.
Pour traduire dans la syntaxe du tableur les expressions en rouge dans le texte, on peut donc ajouter les signes $ comme suit :

=$A2*B$1

Problème n°27

Le quotient euclidien du nombre entier A par 247 est égal à 45.
On pose la division euclidienne de A par 45, quelle est la valeur du quotient de cette division (ou quelles en sont les valeurs possibles s'il y a plusieurs possibilités) ?

Corrigé du problème n°27

Le quotient euclidien du nombre entier A par 247 est égal à 45 donc
$A = 45 \times 247 + r$, r étant un entier inférieur à 247.

La valeur minimum A, obtenue si $r = 0$, est 247×45, le quotient de A par 45 est alors égal à 247

La valeur maximum A, obtenue si $r = 246$, est $247 \times 45 + 246$,
or $246 = 5 \times 45 + 21$, la valeur maximum de A est donc $247 \times 45 + 5 \times 45 + 21$
soit $252 \times 45 + 21$, le quotient de A par 45 est alors 252.

Comme A peut prendre toutes les valeurs entières situées entre les deux cas étudiés ci-dessus, le quotient de A par 45 peut valoir 247, 248, 249, 250, 251 ou 252.

Problème n°28

Il y a quelques années, les camemberts portaient la mention «45% de matière grasse». Aujourd'hui, les mêmes fromages portent la mention «20% de matière grasse».

Il s'agit bien du même fromage, mais le mode de calcul a changé.
Le calcul actuel indique le pourcentage de matière grasse dans le fromage tel qu'il est vendu alors que le mode ancien indiquait le pourcentage dans la matière sèche, c'est-à dire le fromage dont on a retiré toute l'eau qui le constitue (et seulement l'eau).

Déduire de ces informations la masse d'eau que contient un camembert de 250 g.

Corrigé du problème n°28

L'indication actuelle montre que la masse de matière grasse dans un camembert est 20% de 250 g soit 50g.

50 g correspondent donc à 45% de la masse sèche.
La masse sèche, en grammes, est donc égale à $50 \times \frac{100}{45}$ soit $\frac{1000}{9}$ g.

La masse d'eau, différence entre la masse totale et la masse sèche, est donc de $250 - \frac{1000}{9}$ g soit environ 139 grammes.