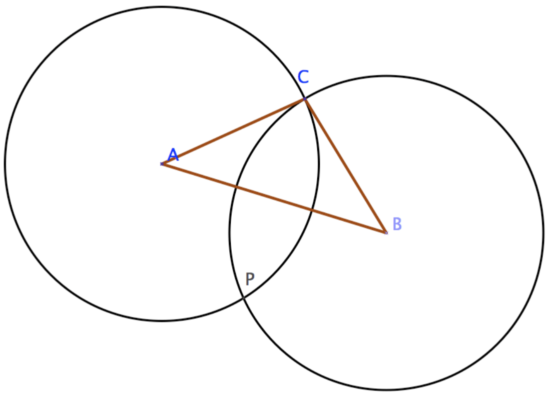
Problèmes de démonstration géométrique.

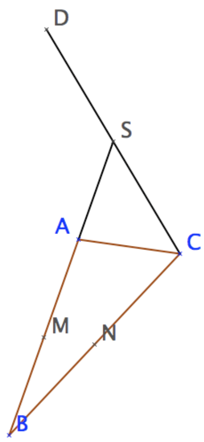
1) ABC est un triangle isocèle en C.
Le cercle de centre A passant par C et le cercle de centre B passant par C se coupent en C et en P.
Démontrer que (AB) et (PC) sont perpendiculaires.



- ABC est isocèle en C donc AC = BC.
- P et C sont sur le même cercle de centre A donc AP = AC.
- P et C sont sur le même cercle de centre B donc BC = BP.
- AP = AC et AC = BC et BC = BP, donc le quadrilatère ACBP a ses quatre côtés égaux, c'est donc un losange.
- ACBP est un losange donc ses diagonales (AB) et (PC) sont perpendiculaires.

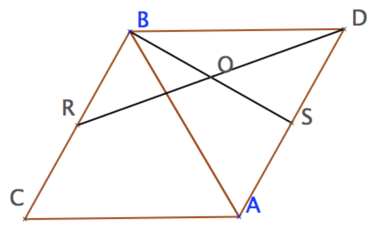
Autre version :
- P et C sont sur le même cercle de centre A donc AP = AC.
- AP = AC donc A est sur la médiatrice de [PC].
- O démontre de la même façon que B est sur la médiatrice de [PC]
- A et B sont sur la médiatrice de [PC] donc (AB) est la médiatrice de [PC].
- (AB) est la médiatrice de [PC] donc (AB) est perpendiculaire à (PC).

2) On considère un triangle ABC.
Soit M le milieu de [AB], N le milieu de [BC], S le symétrique de M par rapport à A, D le symétrique de C par rapport à S.
Démontrer que AD = 2 AN.



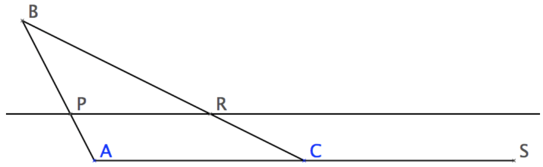
- D est le symétrique de C par rapport à S donc S est le milieu de [DC]
- S est le milieu de [DC] donc [BS] est la médiane issue de B du triangle BDC.
- M est le milieu de [AB] donc BM = MA.
- S est le symétrique de M par rapport à A donc MA = AS.
- Les points B, M,A,S sont alignés dans cet ordre, de plus BM = MA = AS, donc BA = 2/3 BS.
- Le point A est situé au deux tiers de la médiane [BS] en partant du sommet B, c'est donc le centre de gravité du triangle BCD.
- N est le milieu de [BC] donc [DN] est la médiane issue de D du triangle BCD.
- Dans le triangle BCD, [DN] est la médiane issue de D et A est le centre de gravité, donc AD = 2 AN.

3) ABC et ABD sont deux triangles équilatéraux (Les points C et D sont bien entendu distincts).
R est le milieu de [BC], S est le milieu de [AD].
On appelle O l'intersection de [RD] et [BS].
Démontrer que O est le milieu de [RD].



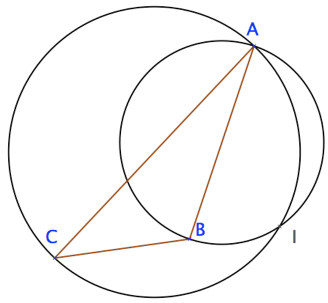
- ABC est équilatéral donc AB = AC = BC.
- ABD est équilatéral donc AB = BD = DA.
- Les quatre côtés du quadrilatère ACBD sont égaux à AB, il sont donc égaux entre eux. Il en résulte que ACBD est un losange.
- ACBD est un losange donc (AD) // (BC), ce qu'on peut aussi noter (DS) // (BR).
- ACBD est un losange donc AD = BC
- R est le milieu de [BC] donc BR = BC/2
- S est le milieu de [AD] donc DS = AD/2
- Il résulte des trois points précédents que BR = DS.
- Les côtés opposés [BR] et [DS] du quadrilatère non croisé BDSR sont à la fois parallèles et égaux, donc BDSR est un parallélogramme.
- BDSR est un parallélogramme donc ses diagonales se coupent en leur milieu, O est donc le milieu de [RD].

4) ABC est un triangle tel que AB = 3 cm, AC = 4 cm, BC = 6 cm.
S est le symétrique de A par rapport à C.
P est le point de [AB] tel que BP = 2 cm.
La parallèle à (AC) passant par P coupe (BC) en R.
Démontrer que (AR) passe par le milieu de [BS].



- P est sur (BA), R est sur (BC) et (PR) // (AC) on peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles BPR et BAC, on a donc : $\frac{BR}{BC} = \frac{BP}{BA}$

  d'où il résulte que $\frac{BR}{BC} = \frac{2}{3}$
- S est le symétrique de A par rapport à C donc C est le milieu de [AS].
- C est le milieu de [AS] donc [BC] est la médiane issue de B du triangle ABS.
- [BC] est la médiane issue de B du triangle ABS et R est le point de [BC] tel que $\frac{BR}{BC} = \frac{2}{3}$ donc R est le centre de gravité du triangle ABS.
- La droite (AR) passe par le sommet A du triangle ABS et par son centre de gravité R, c'est donc la médiane issue de A du triangle ABS.
- (AR) est la médiane issue de A du triangle ABS donc elle passe par le milieu de [BS].

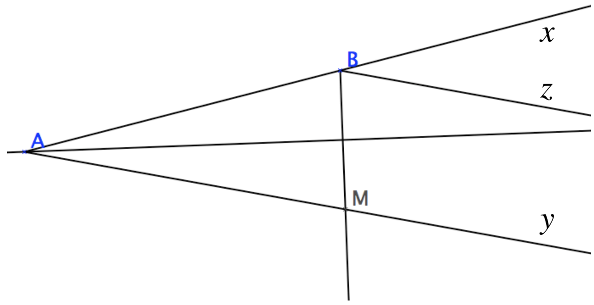


5) On considère un triangle ABC.
Le cercle de diamètre [AB] et le cercle de diamètre [AC] se coupent en A et en I.
Démontrer que I est sur (BC).

- I est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AIB est rectangle en I. Il en résulte que (AI) $\perp$ (IB).
- On démontre de la même façon que (AI) $\perp$ (IC).
- Les droites (IB) et (IC) sont toutes les deux perpendiculaires à (AI) donc elles sont parallèles.
- (IB) et (IC) sont parallèles et ont le point I en commun, elles sont donc confondues, par conséquent I est sur (BC).

6) On considère un angle $\widehat{xAy}$ et un point B situé sur le côté [Ax)
On trace la demi-droite [Bz), parallèle à [Ay) et située à l'intérieur de l'angle $\widehat{xAy}$.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABz}$ coupe [Ay) en M
Démontrer que la médiatrice de [BM] est aussi la bissectrice de $\widehat{xAy}$.



- Les angles $\widehat{MBz}$ et $\widehat{AMB}$ sont alternes internes entre les droite parallèles (Bz) et (Ay) par conséquent $\widehat{MBz} = \widehat{AMB}$
- [BM) est la bissectrice de $\widehat{ABz}$ donc $\widehat{ABM} = \widehat{MBz}$
- $\widehat{ABM} = \widehat{MBz}$ et $\widehat{MBz} = \widehat{AMB}$ donc $\widehat{ABM} = \widehat{AMB}$
- $\widehat{ABM} = \widehat{AMB}$ donc le triangle ABM est isocèle en A
- ABM est isocèle en A donc la médiatrice de [BM] est aussi la bissectrice de $\widehat{BAM}$ c'est à dire de $\widehat{xAy}$