Proportionnalité.

Quand dit-on que deux grandeurs sont proportionnelles ?

On achète un certain nombre de livres coûtant tous le même prix.
Le prix total est proportionnel au nombre de livres achetés.
Si le nombre de livres achetés double (ou triple), le prix total double (ou triple) également.

On s'intéresse à des rectangles ayant tous un côté de 3 cm.
L'aire de ces rectangles est proportionnelle à la mesure de l'autre côté du rectangle.
Si le côté du rectangle double (ou triple), l'aire du rectangle double (ou triple) également.

Un cycliste roule à vitesse constante.
La distance parcourue par ce cycliste est proportionnelle à la durée du trajet.
Si la durée du trajet double (ou triple), la distance parcourue double (ou triple) également.

La remarque faite sur ces trois exemples a une valeur générale.

Pour savoir si deux grandeurs sont proportionnelles, on peut se poser la question suivante : **quand l'une des deux grandeurs double (ou triple), est-on certain que l'autre grandeur double (ou triple) également ?**

Quelques méthodes de calcul pour les situations de proportionnalité.

Ces méthodes ne sont valables **que** si les deux grandeurs étudiées sont proportionnelles.

Méthode de calcul de base (application directe du critère).

Un piéton qui marche à vitesse constante parcourt 900 m en 12 min.
Quelle distance parcourt-il en une heure ?

$60 = 12 \times 5$. La durée étant multipliée par 5, la distance l'est aussi, le piéton parcourt 4500 m.

Ce raisonnement est parfois traduit par un tableau :

$\xrightarrow{\times 5}$

Durée en minutes	12	60
Distance en mètres.	900	4500

Il n'y a pas toujours une multiplication aussi simple permettant d'obtenir ce qu'on cherche, on est donc conduit à adapter la méthode aux situations rencontrées.

adaptation 1

Un piéton qui marche à vitesse constante parcourt 900 m en 12 min.
Quelle distance parcourt-il en 54 min ?

$\xrightarrow{\times 5}$ $\xrightarrow{:10}$

Durée en minutes	12	60	6	60 - 6
Distance en mètres.	900	4500	450	4500 - 450

Si on ajoute (ou soustrait) deux durées de trajet, on ajoute (ou soustrait) les distances correspondantes.

adaptation 2

Un piéton qui marche à vitesse constante parcourt 900 m en 12 min.
Quelle distance parcourt-il en 17 min ?

$$\xrightarrow{:12} \qquad \xrightarrow{\times 17}$$

Durée en minutes	12	1	17
Distance en mètres.	900	75	1275

« Racontée » sous la forme suivante, cette méthode est appelée **« règle de trois »** :

> Le piéton parcourt 900 m en 12 minutes,
> en une minute il parcourt 12 fois moins soit 900 : 12 = 75 m
> en 17 minutes il parcourt 17 fois plus, soit 75 × 17 = 1275 m.

L'utilisation de 1 comme valeur intermédiaire a l'avantage d'être toujours possible, mais l'inconvénient de conduire parfois à des calculs inutilement compliqués :

Un piéton qui marche à vitesse constante parcourt 900 m en 13 minutes.
Quelle distance parcourt-il en 26 minutes ?

$$\xrightarrow{:13} \qquad \xrightarrow{\times 26}$$

Durée en minutes	13	1	26
Distance en mètres.	900	$\frac{900}{13}$	$\frac{900}{13} \times 26$

Si on laisse l'étape intermédiaire $\frac{900}{13}$ sous forme de fraction c'est compliqué, mais exact.

Si on l'écrit sous forme décimale c'est faux, il n'y a a pas d'écriture décimale exacte de $\frac{900}{13}$.

---

adaptation 3

Un piéton qui marche à vitesse constante parcourt 900 m en 12 min.
Quelle distance parcourt-il en 17 min ?

Il est toujours possible de trouver un nombre permettant de passer par une seule multiplication d'une valeur à l'autre…à condition d'utiliser des écritures fractionnaires

$$\xrightarrow{\times \frac{17}{12}}$$

Durée en minutes	12	17
Distance en mètres.	900	$900 \times \frac{17}{12}$

adaptation 4 (d'où découle la règle dite « du produit en croix »)

Un piéton qui marche à vitesse constante parcourt 900 m en 12 min.
Quelle distance parcourt-il en 17 min ?

	$\xrightarrow{\times 17}$	$\xrightarrow{:12}$	

Durée en minutes	12	12×17	17
Distance en mètres.	900	900×17	$\dfrac{900\times 17}{12}$

Cette méthode est parfois enseignée sous le nom de « produit en croix ».
On n'écrit alors pas la colonne intermédiaire, ni les noms des grandeurs, mais seulement un tableau de 4 nombres sous cette forme :

12	17
900	$\dfrac{900\times 17}{12}$

On dispose alors d'une méthode qui a l'avantage d'être générale et facile à mémoriser.

Elle deux inconvénients : être parfois inutilement compliquée et cacher les étapes du raisonnement.
On ne sait plus pourquoi ça marche ce qui entraine, au collège par exemple, de nombreuses erreurs consistant à utiliser cette méthode valable seulement quand il y a proportionnalité alors qu'il n'y a pas de proportionnalité.

Pour ce qui est du CRPE, cette méthode est acceptée puisqu'elle est correcte.
Il est néanmoins indispensable de savoir faire autrement car cette méthode n'a pas sa place à l'école élémentaire or il peut arriver que soit imposée une méthode utilisable à l'école élémentaire.
De plus, s'agissant de futurs professeurs d'école, l'utilisation **systématique** du produit en croix risque de ne pas être perçue favorablement.

Un point de vue différent.

Un mur d'une maison mesure 9 m.
Sur le plan de la maison, ce mur est représenté par un trait de 12 cm.
Quelle est la longueur réelle d'un mur représenté par un trait de 17 cm ?

$\times 75 \downarrow$

Longueur sur le plan en cm.	12	17
Longueur réelle en cm.	900	

Cette méthode est générale, mais il n'est pas toujours facile de lui donner un sens : sur l'exemple ci-dessus, la multiplication par 75 signifie que les longueurs réelles sont égales à 75 fois les longueurs sur le plan, mais quel sens donner à la multiplication par 75 dans l'exemple initial ?

$\times 75 \downarrow$

Durée en minutes.	12	17
Longueur du trajet en mètres.	900	

Le nombre 75 est appelé « **coefficient de proportionnalité** ».
Dans le deuxième exemple, c'est un nombre de mètres par minute…autrement dit c'est la vitesse du piéton en m/min, ce qui n'est pas très évident à voir.

C'est pourquoi le coefficient de proportionnalité, dont le nom n'est pas à connaître par les élèves, n'est utilisé à l'école élémentaire que quand :

les deux grandeurs sont de même nature (deux longueurs, deux masses)
et le coefficient lui même est simple.

Proportionnalité inverse.

La notion de grandeurs inversement proportionnelles est presque tombée en désuétude, les problèmes qui en relèvent étant généralement traités par des méthodes algébriques, elle permet pourtant de résoudre certains problèmes avec élégance.
Les manuels de l'école élémentaire antérieurs à la réforme de 1970 proposaient des définitions voisines de celles-ci :

> On dit que deux grandeurs sont proportionnelles (ou directement proportionnelles) si, quand l'une des deux grandeurs est multipliée par 2, 3, 4… l'autre est également multipliée par 2, 3, 4…
>
> On dit que deux grandeurs sont inversement proportionnelles si, quand l'une des deux grandeurs est multipliée par 2, 3, 4… l'autre est divisée par 2, 3, 4…

Quelques exemples d'utilisation :

Un cycliste qui roule à 25 km/h met 40 minutes pour aller de A à B.
Combien de temps mettrait-il pour faire la même distance à 20 km/h.
Comme la distance à parcourir est toujours la même, si la vitesse double, la durée nécessaire est divisée par deux : la vitesse et la durée sont inversement proportionnelles.
On peut alors raisonner ainsi :

Pour parcourir la même distance à 5 km/h (vitesse divisée par 5) le cycliste mettrait 40 x 5 = 200 min.
Pour parcourir la même distance à 20 km/h (vitesse multipliée par 4) il mettrait 200 : 4 = 50 min.

3 ouvriers peignent un mur en 10 heures. Combien de temps faut-il à 4 ouvriers pour peindre le même mur ?
Sous les réserves précisées ci-dessous, on peut considérer que la durée nécessaire est inversement proportionnelle au nombre d'ouvriers.
On peut alors raisonner ainsi :

S'il y avait 1 ouvrier au lieu de 3, il faudrait 3 fois plus de temps, soit 30 heures
S'il y avait 4 ouvriers au lieu d'un, il faudrait 4 fois moins de temps, soit 7heures et 30 minutes.

Pour ceux qui préfèrent utiliser l'algèbre, la proportionnalité inverse entre deux grandeurs x et y se traduit par la relation suivante : xy = **constante**.
quand des mobiles parcourent la même distance à des vitesses différentes, la vitesse et la durée du trajet ssont inversement proportionnelles, ce qui se traduit par la relation classique $d = vt$

Si deux grandeurs x et y sont proportionnelles, il existe entre elles une relation du type
$y = x \times$ constante, ou si l'on préfère $x = y \times$ constante.
Pour des mobiles ayant tous une vitesse constante, la relation $d = vt$ traduit le fait que la distance parcourue est alors proportionnelle au temps.

On constate qu'une même relation algébrique permet de rendre compte à la fois d'une situation ou certaines grandeurs sont proportionnelles et d'une situation ou certaines grandeurs sont inversement proportionnelles d'une façon particulièrement concise.

Une phase souvent négligée dans la résolution de problèmes : la mathématisation

Pour ce qui est des problèmes de proportionnalité directe ou inverse, le sous titre ci-dessus signifie qu'on a trop souvent tendance à utiliser une technique liée à la proportionnalité (et spécialement le produit en croix) sans avoir explicité les grandeurs en jeu et sans s'être assuré que ces grandeurs sont bien proportionnelles.

Pour chacun des exemples qui suivent, on donne une situation et deux des grandeurs relatives à cette situation. Il s'agit de savoir si les deux grandeurs sont proportionnelles, inversement proportionnelles, ou si elles n'ont pas de lien de proportionnalité.

- Des ouvriers peignent un mur. Grandeurs : le nombre d'ouvriers et la durée nécessaire.
- Une automobile va de Nantes à Paris. Grandeurs : la consommation totale de carburant et la vitesse moyenne.
- Une automobile roule à vitesse constante. Grandeurs : la durée du trajet et la distance parcourue.
- Une automobile roule à vitesse constante. Grandeurs : la durée du trajet et le volume de carburant consommé.
- Monsieur Durand dispose d'une certaine somme pour acheter un terrain. Grandeurs : l'aire du terrain acheté et le prix par mètre carré du terrain.

Réponses :
- En première approximation, si on double le nombre d'ouvriers, la durée nécessaire sera divisée par deux. Les deux grandeurs seraient donc inversement proportionnelles. Bien entendu, cela n'est vrai que si le matériel est présent en quantité suffisante, si les ouvriers ne se gènent pas, s'ils sont d'égale compétence… On peut douter que si un ouvrier fait le travail en 20 heures, soit 72 000 secondes, mille ouvriers le feront en 72 secondes.
- Si la vitesse moyenne augmente, on sait que la consommation augmente également… mais rien n'indique que si la vitesse moyenne passe de 40 à 80 kilomètres par heure la consommation double. Il n'y a pas de lien de proportionnalité entre les deux grandeurs.
- Si la vitesse est constante, quand la durée du trajet double, la distance parcourue double, les deux grandeurs sont incontestablement proportionnelles. L'écart entre la réalité et sa modélisation a été pris

en charge par l'auteur de la question, en effet il est très rare qu'une voiture roule longtemps à vitesse constante, mais si on admet qu'elle le fait…

- Si une voiture roule à vitesse constante, la durée du trajet est également proportionnelle à la quantité de carburant consommé.
- Si le prix du mètre carré double, la surface correspondant à la somme dont dispose monsieur Durand sera divisée par deux : les grandeurs sont inversement proportionnelles. Là encore, on peut discuter l'adéquation à la réalité : la surface dont il est question est celle dont le prix correspond exactement à la somme dont dispose monsieur Durand, mais il n'est pas certain que Monsieur Durand tienne absolument à dépenser tout l'argent dont il dispose, ni qu'il existe un terrain ayant exactement l'aire calculée. Enfin on ne sait pas si les frais et taxes liés à l'achat sont comptés dans le prix au mètre-carré… et ces frais ne sont pas proportionnels au prix hors frais et taxes.

La lecture de ces réponses vous a probablement laissé une impression désagréable : «ce n'est pas très mathématique» «c'est vague» «finalement on ne sait pas vraiment si c'est proportionnel ou non».
Vous avez parfaitement raison, et vous avez compris l'essentiel : décider si telle et telle grandeur sont ou ne sont pas proportionnelles (ou inversement proportionnelles) ne relève pas des mathématiques. C'est la connaissance de la situation décrite du point de vue de la physique, des usages sociaux ou du simple bon sens qui nous fait décider si la proportionnalité (directe ou inverse) traduit correctement la situation.
Et dans bien des cas, on est conduit à dire que la proportionnalité ne traduit pas très bien la situation mais à l'utiliser quand même faute de mieux.
La résolution d'un problème qui n'est pas posé directement en termes mathématiques demande toujours une première phase consistant à choisir les outils mathématiques qui décrivent le mieux la situation. Cette phase n'est pas à l'intérieur des mathématiques et ne peut donc pas avoir la rigueur attendue d'un raisonnement mathématique.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.