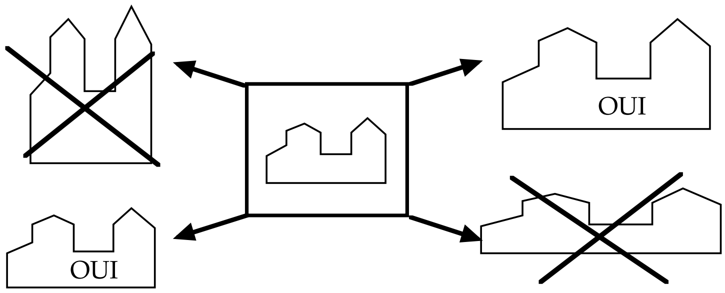
Agrandissements et réductions.

Agrandissements :

Quand on emploie le mot agrandissement en mathématiques, cela indique bien sûr qu'une figure devient plus grande, mais pas n'importe comment.

Il faut, comme en photographie que la figure agrandie garde la même forme que la figure de départ.



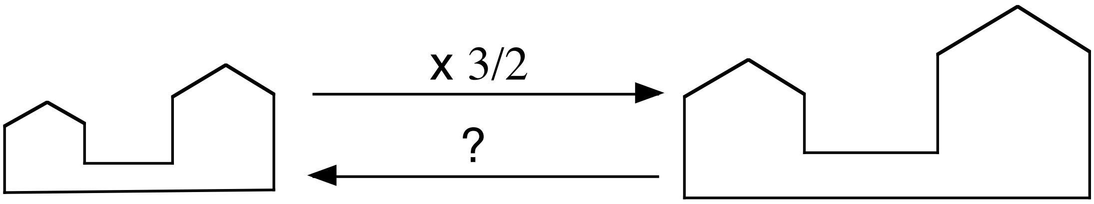
Voici comment le fait que la forme ne change pas se traduit pour les mesures :

Dans un agrandissement :

- Les angles ne changent pas.
- **Les longueurs sont toutes multipliées par un même nombre k qu'on appelle le coefficient ou le rapport de l'agrandissement.**
- **Les aires** sont toutes multipliées par un même nombre **: le carré du nombre k.**
- **Les volumes** sont tous multipliés par un même nombre : **le cube du nombre k.**

(voir au verso pour la justification de ces propriétés)

Du point de vue didactique, le fait que l'agrandissement soit lié à une multiplication est difficile, car dans la langue courante, les mots grandir et agrandir évoquent plutôt une addition : ma sœur a grandi de 5 cm, j'ai agrandi ma maison en ajoutant une pièce…



Réductions :

Le coefficient de l'agrandissement est $\frac{3}{2}$, quel est le coefficient de la réduction correspondante ?

pour réduire, on peut diviser les longueurs par 3/2 ,
L'usage est plutôt de **multiplier les longueurs par 2/3**
C'est le nombre 2/3 (et non 3/2) qui est appelé coefficient de cette réduction.

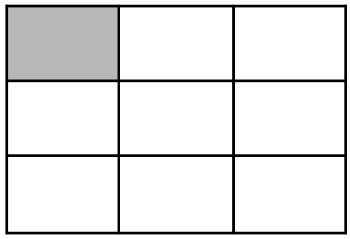
En respectant cette convention, les propriétés écrites plus haut pour l'agrandissement sont valables aussi pour la réduction :

Dans une réduction :

- Les angles ne changent pas.
- **Les longueurs sont toutes multipliées par un même nombre k qu'on appelle le coefficient ou le rapport de la réduction.**
- **Les aires** sont toutes multipliées par un même nombre **: le carré du nombre k.**
- **Les volumes** sont tous multipliés par un même nombre : **le cube du nombre k.**

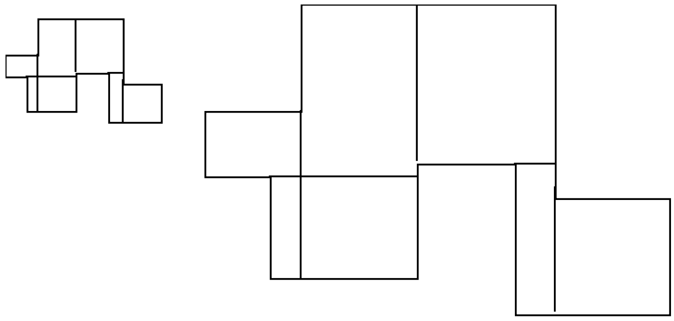
Pour le calcul, la seule différence entre agrandissement et réduction est que :
Le coefficient d'une réduction est compris entre 0 et 1, alors que
Le coefficient d'un agrandissement est plus grand que 1.

Dans un agrandissement de coefficient k les aires sont multipliées par k^2
Quelques éléments de preuve.



Une première approche permet de constater le phénomène en dessinant des rectangles : si on applique au rectangle gris un agrandissement de coefficient 3, il est manifeste que le rectangle obtenu contient 9 (c'est à dire 3^2) rectangles gris.

Cependant, on ne peut pas découper un disque en 9 disques identiques, et on rencontre la même difficulté pour beaucoup de figures.
Pour contourner cette difficulté, les mathématiciens utilisent deux stratégies différentes :



L'une consiste à découper la figure en petits rectangles. Comme l'aire de chaque rectangle est multipliée par 9, l'aire totale de la figure l'est aussi. Mais toutes les figures ne peuvent pas être découpées en rectangles, pour le disque par exemple, on voit bien qu'il est seulement possible de le recouvrir ***presque*** exactement avec des rectangles (si ceux ci sont très petits)… toute la difficulté consiste à préciser ce que signifie « presque ».
Cela dépasse largement le niveau auquel nous travaillons ici.

Une autre approche consiste à utiliser l'algèbre : les formules de calcul d'aire sont ici réellement utiles.
Supposons qu'on agrandisse un parallélogramme de base b et de hauteur h, et que le coefficient d'agrandissement soit k.
Comme toutes les mesures de longueur sont multipliées par k, le parallélogramme agrandi a pour base $k \times b$ et pour hauteur $k \times h$. Son aire est donc $(k \times b) \times (k \times h)$.

Or, on a $(k \times b) \times (k \times h) \quad = \quad k \times b \times k \times h \quad = \quad k \times k \times b \times h \quad = \quad k^2 \times (b \times h)$

On a bien démontré que l'aire du grand parallélogramme (première expression de la chaîne d'égalités) est égale à l'aire du petit parallélogramme multipliée par k^2 (dernière expression de la chaîne).

L'intérêt principal de cette façon de voir les choses est que le calcul est valable même si k n'est pas entier alors que le dessin ne permet plus de conclure.

Il peut être intéressant pour ceux d'entre vous qui ne sont pas à l'aise en algèbre d'essayer de prouver par la même méthode que l'aire d'un triangle, d'un disque, d'une figure composée de deux rectangles…. Est aussi multipliée par k^2 quand la figure subit un agrandissement de coefficient k.

Y Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes