Corrigé de l'épreuve blanche de mathématique du 27 mars 2015

Première partie : Problème

Partie A : Le moulin

1.

a. Le volume de la partie cylindrique est égal à $\pi \times R^2 \times h$. Le volume du cône est égal à $\dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3}$

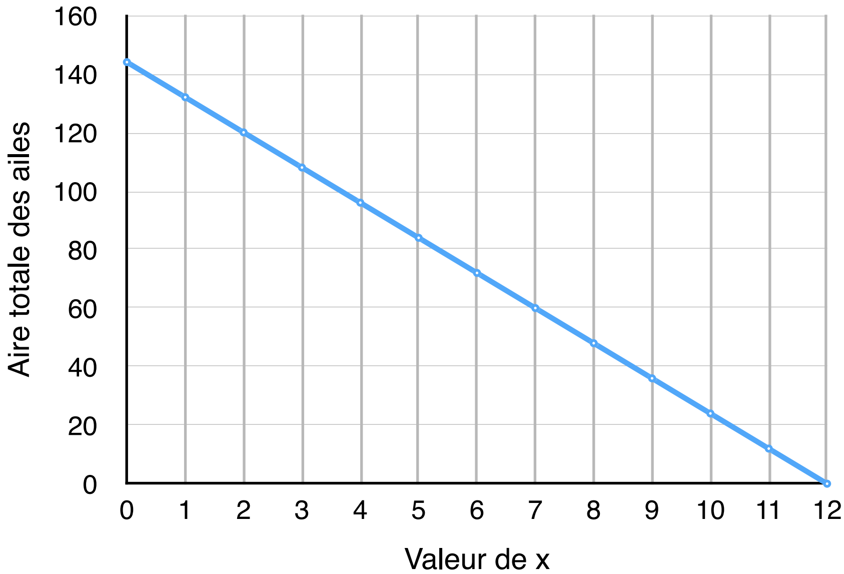
Le volume du moulin, somme de ces deux parties, est donc $\pi \times R^2 \times h + \dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3}$ soit $\dfrac{4\pi R^2 h}{3}$

b. Si R = 3 et h = 6, le volume du moulin est 72π mètres cubes, soit environ $226 m^3$ (arrondi au mètre cube).

2.

a. La hauteur issue de O du triangle OMN mesure la moitié d'un côté du carré, soit 6 m.
L'aire du triangle OMN est donc égale à $(6x):2$ soit $3x$.
L'aire totale des ailes du moulin est obtenue en soustrayant l'aire de 4 triangles superposables à OMN de l'aire du carré ABCD, elle est égale à $144 - 12x$

b.



c. D'après ce graphique, pour que l'aire des ailes soit $20 m^2$ la valeur de x doit être d'environ 10,4 m.

d. Si l'aire totale des ailes est de $36 m^2$, on a $144 - 12x = 36$, d'où $12x = 108$ et $x = 9$.

3.

a. Le triangle OMN est isocèle en O, donc sa médiane [OH] est aussi la hauteur issue de O, le triangle OHM est donc rectangle en H. Il en résulte, selon le théorème de Pythagore, que $OM^2 = OH^2 + HM^2$.
On a donc $OM^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25$ et OM = 7,5.
Le périmètre des ailes du moulin est la somme des longueurs de 8 segments de longueur OM et 8 segments de longueur MD, il est donc égal à $8 \times 7{,}5 \quad + \quad 8 \times 1{,}5$ soit 72 m.

b. Dans le triangle OHM, rectangle en H, on a $\tan(\widehat{HOM}) = \dfrac{4{,}5}{6} = \dfrac{3}{4}$. Donc $\widehat{HOM} \approx 37°$.

Avec 8 angles égaux à $\widehat{HOM}$ et 4 angles égaux à $\widehat{MOU}$ on obtient un tour complet, soit 360°.

On a donc $\widehat{MOU} = \dfrac{360 - 8\widehat{HOM}}{4} = 90 - 2\widehat{HOM} \approx 16°$

c. Le triangle DUM est isocèle rectangle en D, on a donc $MU = DU \times \sqrt{2} = 1{,}5\sqrt{2} \approx 2{,}12m$.
d. J est sur [OM], K est sur [OU] et (JK) est parallèle à (MU) par conséquent les triangles OJK et OMU sont en situation de Thalès et on a : $\frac{OJ}{OM} = \frac{JK}{MU}$, soit $\frac{3}{7{,}5} = \frac{JK}{MU}$.

On en déduit que $JK = \frac{3}{7{,}5} MU = 0{,}4MU \approx 0{,}85m$.

Partie B.

1.

Callibre (en mmm)	[55 ; 60[	[60 ; 65[	[65 ; 70[	[70 ; 75[	[75 ; 80[	[80 ; 85[
Effectif (nombre de pommes)	13	20	30	23	26	18
Effectif cumulé croissant	13	33	63	86	112	130

2.
a. 63 pommes ont un calibre inférieur à 70 mm.
b. 44 pommes ont un calibre d'au moins 75 mm.
c. Il y a 49 pommes dont le calibre d est tel que $70 \leq d < 80$. $49/130 \approx 0{,}376923$ c'est à dire 37,7% environ (valeur approchée à 0,1% près par excès).
d. Le calibre médian est situé entre celui de la 65ème pomme et celui de la 66ème (si elle sont rangées par ordre de calibre croissant), il est donc situé dans la classe [70 ; 75[.

Deuxième partie : exercices indépendants.

Exercice 1
Les justifications sont données ici pour information, nous rappelons qu'elles n'étaient pas demandées.

1. on peut obtenir, en notant d'abord le résultat de la première pièce puis celui de la deuxième, les cas suivants, tous équiprobables : pile-pile ; pile-face ; face-pile ; face-face. une seule issue sur quatre permet d'obtenir deux fois pile, la probabilité est donc de 1/4
2. 364 = 4 x 91 = 2 x 2 x 7 x 13 $364 = 4 \times 91 = 2 \times 2 \times 7 \times 13$
   $156 = 3 \times 52 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$ Le PGCD de ces deux entiers est $2 \times 2 \times 13$ soit 52.

3. Une augmentation de 50%, soit la moitié, conduirait à un nombre de visiteurs égal à 48, l'augmentation constatée est donc supérieure à 50%. La seule réponse possible est donc 87,5%.

4. En gardant la même vitesse, la personne qui parcourt 4,2 km en 8 mn parcourrait 42 km en 80 mn (dix fois plus), donc 10,5 km en 20 min (quatre fois moins) et 31,5 km en une heure (trois fois plus).

5. lors d'une augmentation de 20%, un prix est multiplié par 1,20. Soit d le nombre par lequel il est multiplié lors de la réduction, on a 1,20d = 1 donc d = 1/1,20 ≈0,8333. La diminution est donc de 17% environ (à 1% près).

6. AIJD est un rectangle : ce n'est pas un losange ni un carré car AI > AB donc AI > AD. C'est donc un rectangle.

Exercice 2
1.
a. Les tirages possibles sont :
1-1 ; 1-2 ; 1-3 ; 1-4 ; 2-1 ; 2-2 ; 2-3 ; 2-4 ; 3-1 ; 3-2 ; 3-3 ; 3-4 ; 4-1 ; 4-2 ; 4-3 ; 4-4
Les sommes que l'on peut obtenir sont 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 et 8

b. Chacun des tirages est équiprobable et a une probabilité de 1/16.
Un seul de ces tirages conduit à la somme 2, la probabilité d'obtenir 2 est de 1/16. il en est de même pour 8.
Il y a deux façons d'obtenir 3, la probabilité d'obtenir 3 est de 2/16 soit 1/8 (de même pour 7).
Il y a trois façons d'obtenir 4 (1-3 ; 2-2 et 3-1), la probabilité d'obtenir 4 est donc 3/16 (de même pour 6).
Il y a quatre façons d'obtenir 5 (1-4 ; 2-3 ; 3-2 ; 4-1), la probabilité d'obtenir 5 est donc 4/16 ou 1/4.

c. Les nombres qui ont exactement deux diviseurs sont les nombres premiers (les diviseurs sont alors 1 et le nombre lui même). Parmi les sommes que l'on peut obtenir, les nombres premiers sont 2, 3, 5 et 7.
La probabilité d'obtenir une de ces sommes est 1/16 + 1/8 + 1/4 + 1/8 soit 9/16.

2.
a. Les tirages possibles sont maintenant :
1-2 ; 1-3 ; 1-4 ; 2-1 ; 2-3 ; 2-4 ; 3-1 ; 3-2 ; 3-4 ; 4-1 ; 4-2 ; 4-3
Les sommes que l'on peut obtenir sont 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 7

b. Chacun des tirages est équiprobable et a une probabilité de 1/12.
Il y a deux façons d'obtenir 3, la probabilité d'obtenir 3 est de 2/12 soit 1/6 (de même pour 7).
Il y a deux façons d'obtenir 4 (1-3 et 3-1), la probabilité d'obtenir 4 est donc 2/12 soit 1/6 (de même pour 6).
Il y a quatre façons d'obtenir 5 (1-4 ; 2-3 ; 3-2 ; 4-1), la probabilité d'obtenir 5 est donc 4/12 ou 1/3.

c. Les nombres qui ont au moins trois diviseurs sont ceux qui ne sont pas premiers, ici 4 et 6. La probabilité d'obtenir un de ces nombres est donc 1/6 + 1/6 soit 1/3.

Exercice 3

1. les élèves peuvent rencontrer les difficultés suivantes :
   - Difficultés liées à la perception de la figure et à son analyse (par exemple ne pas remarquer que ABCD est un carré, ou que D et F sont les centres des cercles).
   - Difficultés d'organisation liées à l'ordre de la construction (par exemple tracer deux cercles de même rayon mais sans tenir compte de la distance entre les rayons).
   - Difficultés liées au respect des dimensions (précision des mesures de longueur et de leur report à la règle ou au compas).
   - Difficultés liées au maniement des outils, notamment l'équerre et le compas.

2. Voici un programme possible :
Trace un rectangle que tu appelleras AEFD et qui a les dimensions suivantes : AE = 8 cm ; AD = 2,7 cm.
Trace le cercle qui a pour centre le point D et qui passe par le point A.
Nomme C le point où ce cercle coupe le côté DF du rectangle.
Trace le cercle qui a pour centre le point F et qui passe par le point E.
Place sur le côté AE du rectangle un point B à 2,7 cm de A.
Trace le segment qui a pour extrémités B et C.

Troisième partie : les calculs de durées

Partie A

1. « 9 heures » peut être une mesure de durée comme dans la phrase « nous avons roulé pendant 9 heures », ou bien être le repérage d'un instant comme dans la phrase « ce train partira à 9 heures ».

2. Voici deux procédures utilisables par un élève de CM1 :

- De 7 h 40 à 8 h il y a 20 min.
  De 8 h à 11 h il y a 3 heures.
  De 11 h à 11 h 35 il y a 35 minutes.
  En tout, la durée du trajet est donc de 20 min + 3h + 35min, soit 3 h 55 min.
- De 7 h 40 à 11 h 40, il y a 4 heures, comme le train arrive 5 minutes avant 11 h 40, la durée du trajet est de 4 heures moins 5 minutes, soit 3 heures et 55 minutes.

3.

a. Anaïs pose une soustraction dont le sens est bien adapté à la question posée, mais elle l'effectue en utilisant la technique adaptée à la soustraction de deux décimaux. Elle fait comme si 11h35 et 7h40 signifiaient 11,35 h et 7,40h.
   Hector cherche également à calculer la durée par soustraction, mais il traite séparément les heures et les minutes. 40 étant plus grand que 35, il pose 40 - 35 (c'est 35 - 40 qui correspondrait à la situation, ce qu'il ne peut pas concevoir ne disposant pas des nombres négatifs). De ce fait, il effectue en réalité la soustraction (11 h 40 - 7 h 35)

b. Pour les deux élèves, on peut proposer de remplacer une heure par 60 minutes quand cela facilite les calculs. Dans l'exercice proposé, écrire 11 h 35 min sous la forme 10 h 95 min permet d'éviter les erreurs commises par les deux élèves. Il faudra naturellement montrer que ce changement d'écriture a du sens : « 95 minutes après 10 heures » n'est pas une écriture usuelle, mais elle désigne le même instant que « 35 minutes après 11 heures ».

4. Parmi les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer il y a :
- Le fait de faire calculer l'instant initial ou l'instant final.
- Le fait d'utiliser seulement des heures entières ou des heures et des minutes.
- La nécessité ou non de convertir des heures en minutes pour effectuer le calcul.
- Le fait que l'instant initial et l'instant final sont ou non situés dans le même jour.

5. Parmi les automatismes favorisant les calculs de durée (et les calculs d'un instant) on peut citer :
- La connaissance des rapports entre les unités de durée (un jour 24 heures, une heure = 60 minutes).
- La décomposition de la durée à calculer en utilisant comme instants intermédiaires les heures justes (voir première réponse de la question 2) ou en utilisant des intervalles d'une durée entière en heures (voir deuxième réponse de la question 2).
- L'utilisation du remplacement d'une heure par 60 minutes dans le nombre du haut de la soustraction posée (voir question 3b)
- Le calcul mental de la soustraction de deux entiers (par exemple 52 - 35) et particulièrement le calcul mental de l'écart entre 60 et un nombre plus petit que 60 (pour trouver par exemple que de 8h 17 à 9 h il y a 43 minutes.

Partie B

La compétence dont il est question figure dans la répartition par années du cycle 3 formulée ainsi : « Calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final ». Dans l'exercice fourni, la tâche de l'élève consiste bien à calculer une durée, l'instant initial et l'instant final sont donnés, l'exercice relève donc bien de la compétence citée. Il présente cependant des inconvénients importants :

La question qui nous est posée ne précise pas si l'exercice serait une partie de l'évaluation envisagée ou s'il constituerait à lui seul l'évaluation. Dans ce deuxième cas, il serait particulièrement inadapté puis qu'il ne porte que sur un des cas les plus difficiles que l'on puisse envisager (il y a des heures et des minutes, le nombre de minutes de l'instant final est inférieur à celui de l'instant initial). Cela ne permettrait pas de repérer les compétences d'élèves capables de résoudre des cas plus simples (par exemple déterminer la durée entre deux instants correspondant à des heures « justes »).

Les étapes intermédiaires indiquées imposent une procédure particulière : un élève peut être capable de calculer la durée demandée par une autre procédure et ne pas réussir à utiliser celle-ci. Cet exercice ne permet pas de mettre en évidence sa compétence.

Un autre élève peut réussir la tâche en appliquant pas à pas les étapes imposées alors qu'il ne saurait pas le faire de façon autonome. L'évaluation indiquera alors qu'il a acquis la compétence visée, ce qui mériterait au minimum d'être nuancé.

Les consignes sont beaucoup trop elliptiques :
- Il n'est pas dit que la durée cherchée est celle qui commence à 9 h 35 et se termine à 23 h 20
- Les durées qu'il faut compléter sont celles des intervalles du schéma… ce n'est pas dit.
- Le « calcul du nombre total de minutes » attendu consiste à additionner celles des durées indiquées à l'étape précédente qui sont exprimées en minutes (en principe 25 min + 20 min) mais cela n'a rien d'évident : les durées exprimées en heures peuvent l'être en minutes et un élève peut penser qu'on lui demande d'exprimer en minutes la durée totale.