Concours de recrutement de professeur des écoles, Avril 2016
Corrigé non officiel de l'épreuve de mathématiques
Sujet 4 (Polynésie)

Les parties en italique sont des compléments qui n'étaient pas attendus des candidats.

Première partie (13 points)

Partie A : Étude préliminaire - Relations métriques dans un triangle rectangle

1. Étude d'un cas particulier

   a. $AB^2 = 7,5^2 = 56,25$
   $AC^2 + BC^2 = 4,5^2 + 6^2 = 20,25 + 36 = 56,25$

   On constate que $AB^2 = AC^2 + BC^2$, le triangle ABC est donc rectangle en C.

   L'aire de ABC est donc égale à $\frac{6 \times 4,5}{2}$ soit $13,5 cm^2$

   b. L'aire de ABC peut également se calculer en choisissant le côté [AB] comme base, [CH] étant alors la hauteur. L'aire s'exprime alors par $\frac{AB \times CH}{2}$ et on a donc $\frac{7,5 \times CH}{2} = 13,5$ d'où on tire $CH = \frac{13,5 \times 2}{7,5} = 3,6$. La longueur CH est 3,6 cm.

   c. Les triangles rectangles BHC, ont en commun l'angle de sommet B. Le cosinus de cet angle a la même valeur qu'on l'exprime à l'aide de l'un ou l'autre triangle, on a donc :
   $\frac{BH}{6} = \frac{6}{7,5}$ d'où on tire $BH = \frac{6 \times 6}{7,5} = 4,8$. La longueur BH est 4,8 cm.

   Remarque : il était évidemment possible d'utiliser le théorème de Pythagore.

   AH = AB - BH = 7,5 - 4,8 = 2,7. La longueur AH est 2,7 cm.

   d. $CH^2 = 3,6 \times 3,6 = 12,96$
   $AH \times BH = 2,7 \times 4,8 = 12,96$

   On constate bien que $CH^2 = AH \times BH$.

2. Étude du cas général

   a. Le triangle BHC est rectangle en H donc $\widehat{CBH} = 90° - \widehat{HCB}$. Par ailleurs l'angle $\widehat{ACB}$ est droit donc $\widehat{ACH} = 90° - \widehat{HCB}$. Les angles $\widehat{CBH}$ et $\widehat{ACH}$ ont donc la même mesure.

   b. Ces angles ayant la même mesure, en exprimant $\tan\widehat{CBH}$ dans le triangle BHC et $\tan\widehat{ACH}$ dans le triangle ACH, on obtient des nombres égaux : $\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH}$.

Quand deux rapports sont égaux, les produits en croix sont égaux, donc $CH^2 = AH \times BH$.

Partie B : Étude de l'aire d'un arbelos dans un cas particulier

1. Étude graphique de l'aire
   a. Lorsque x=4, l'aire de l'arbelos est d'environ $6\pi\ cm^2$.
   b. L'aire de l'arbelos est de $2\pi\ cm^2$ pour une valeur deBH proche de 0,9 *cm* et pour une autre valeur proche de 6,1 *cm.*
   c. L'aire est comprise entre *0 et* $4\pi\ cm^2$ Si BH est compris entre 0 et 2 cm ou bien si BH est compris entre 8 et 10 cm.
   d. L'aire semble être maximale pour BH = 5 cm et valoir alors environ $6{,}25\pi\ cm^2$

2. Vérification algébrique
   a. x peut prendre toutes les valeurs de 0 à 10.
   b. L'aire de l'arbelos peut être calculée en soustrayant de l'aire du demi-disque de diamètre AB les aires des demi-disques de diamètres HB et AH. On a donc :

$$A(x) = \frac{1}{8}\pi\times10^2 - \frac{1}{8}\pi\times x^2 - \frac{1}{8}\pi\times(10-x)^2$$

c.

$$A(x) = \frac{1}{8}\pi\times10^2 - \frac{1}{8}\pi\times x^2 - \frac{1}{8}\pi\times(10-x)^2$$
$$A(x) = \frac{100}{8}\pi \quad -\frac{1}{8}\pi\left(x^2+(10-x)^2\right)$$
$$A(x) = \frac{100}{8}\pi \quad -\frac{1}{8}\pi\left(x^2+x^2-20x+100\right)$$
$$A(x) = \frac{50}{4}\pi \quad -\frac{1}{4}\pi\left(x^2-10x+50\right)$$
$$A(x) = \frac{50}{4}\pi \quad -\frac{1}{4}\pi\left(x^2-10x+25+25\right)$$
$$A(x) = \frac{50}{4}\pi \quad -\frac{1}{4}\pi\left((x-5)^2+25\right)$$
$$A(x) = \frac{50}{4}\pi \quad -\frac{1}{4}\pi(x-5)^2-\frac{25}{4}\pi$$
$$A(x) = \frac{25}{4}\pi \quad -\frac{\pi}{4}(x-5)^2$$

La transformation de l'écriture littérale peut se faire de nombreuses façons dont certaines sont un peu plus rapides, que celle que nous avons choisie mais n'est dont aucune n'est absolument évidente.

   d. *On peut répondre à cette question en admettant le résultat de la précédente, qui est fourni dans l'énoncé, si on n'est pas parvenu à le démontrer.*

$A(x) = \frac{25}{4}\pi \quad -\frac{\pi}{4}(x-5)^2$ or le nombre $\frac{\pi}{4}(x-5)^2$, produit d'un carré par un nombre positif, est positif ou nul. Il en résulte que $A(x)$ est maximum quand $\frac{\pi}{4}(x-5)^2$

est nul, c'est à dire quand x=5. On a alors $A(x)= \dfrac{25}{4}\pi = 6{,}25\pi$. Les résultats de la question B1d sont ainsi confirmés.

Partie C : Étude de l'aire d'un arbelos dans le cas général

1. Comme à la question B2b, l'aire de l'arbelos peut être calculée en soustrayant de l'aire du demi-disque de diamètre AB les aires des demi-disques de diamètres HB et AH. On a donc :

$$A(x)= \frac{1}{8}\pi\times(x+y)^2-\frac{1}{8}\pi\times x^2-\frac{1}{8}\pi\times y^2$$
$$A(x)= \frac{1}{8}\pi\left((x+y)^2-x^2-y^2\right)$$
$$A(x)= \frac{1}{8}\pi\left(x^2+2xy+y^2-x^2-y^2\right)$$
$$A(x)= \frac{1}{8}\pi(2xy)=\frac{\pi}{4}xy$$

2. Le point C est situé sur le cercle de diamètre [AB] donc ABC est rectangle en C.

3. On a établi à la question A2b que $CH^2 = AH\times BH$ ce qui, avec les notations de la partie C, s'écrit $h^2 = xy$. En utilisant cette égalité, l'expression de l'aire trouvée en question C1 devient $A(x)=\dfrac{\pi}{4}h^2$, l'aire de l'arbelos est donc bien égale à celle du disque de diamètre [CH].

Partie D : Prolongement

1. Dans le cas où n = 2, Le pourtour de la partie hachurée est constitué du segment [AB] et de deux demi-cercles de diamètre 5 cm, le périmètre est donc égal à $10+2\times\dfrac{5\pi}{2}$ soit $5\pi+10\ cm$.

Son aire est celle d'un disque de diamètre 5 cm soit $\dfrac{\pi\times 5^2}{4}$ c'est à dire $6{,}25\pi\ cm^2$.

2. Dans le cas où n = 2, Le pourtour de la partie hachurée est constitué du segment [AB] et de quatre demi-cercles de diamètre 2,5 cm, le périmètre est donc égal à $10+4\times\dfrac{2{,}5\pi}{2}$ soit $5\pi+10\ cm$.

Son aire est celle de deux disques de diamètre 2,5 cm soit $2\times\dfrac{\pi\times 2{,}5^2}{4}$ c'est à dire $3{,}125\pi\ cm^2$.

3. Étude du cas général

   a. Le pourtour de la partie hachurée est constitué du segment [AB] et de n demi-cercles de diamètre $\frac{10}{n}$ cm, le périmètre est donc égal à $10+n\times\frac{\frac{10}{n}\pi}{2}=10+n\times\frac{5\pi}{n}=10+5\pi$.
   On constate que le périmètre ne dépend pas de n.

   b. L'aire de la surface hachurée est celle de n demi-disques de diamètre $\frac{10}{n}$ cm soit
   $n\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi\times\left(\frac{10}{n}\right)^2}{4}=n\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi\times100}{4\times n^2}=\frac{25\pi}{2n}\,cm^2$.

4. Dire que l'aire de la surface hachurée est inférieure à $0{,}1\,cm^2$ revient à dire que
   $\frac{25\pi}{2n}<0{,}1$; $25\pi<0{,}2n$; $125\pi<n$ or $125\pi\approx392{,}7$ la plus petite valeur de n qui convient est donc 393.

Pour cette valeur de n comme pour toutes les autres, le périmètre mesure $5\pi+10\,cm$.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

1. Il y a 6 tirages équiprobables parmi lesquels 3 sont pairs (2, 4 et 6) la probabilité d'obtenir un nombre pair est donc de $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$.

2. Le tableau ci-dessous représente tous les tirages possibles (la ligne grise indique les valeurs d'un des dés, la colonne grise celle de l'autre dé). Nous avons inscrit le nombre 8 dans les cases représentant un tirage dont la somme est 8.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						8
3					8	
4				8		
5			8			
6		8				

Le tableau montre que la probabilité d'obtenir 8 est égale à $\frac{5}{36}$.

3. La probabilité d'avoir un jeton rouge au premier tirage est de 25/42. Il reste alors dans le sac 41 jetons dont 24 sont rouges. La probabilité de tirer à nouveau un rouge au deuxième tirage est donc de 24/41 et la probabilité de tirer deux rouges successivement est de $\frac{25}{42}\times\frac{24}{41}$.
   La probabilité d'avoir un jeton bleu au premier tirage est de 17/42. Il reste alors dans le sac 41 jetons dont 16 sont bleus. La probabilité de tirer à nouveau un bleu au deuxième tirage est donc de 16/41 et la probabilité de tirer deux rouges successivement est de $\frac{17}{42}\times\frac{16}{41}$.

La probabilité d'obtenir en deux tirages deux jetons de même couleur est la somme des deux précédentes, elle vaut $\frac{25\times 24+17\times 16}{42\times 41}$ soit $\frac{872}{1722}$ soit environ 50,6%.

Exercice 2

Soit c la longueur du côté du carré, la mesure de son aire est c^2.

Si on augmente de 100% la longueur du côté, il devient $2c$, l'aire est alors de $4c^2$, elle a été quadruplée ce qui correspond à une augmentation de 300%. Eva a raison.

Exercice 3

1.
   a. Si le nombre de départ est 5, on effectuer successivement $5+6=11$; $11\times 5=55$ et $55+9=64$, le résultat affiché sera 64.
   b. Si le nombre de départ est 10, on effectuer successivement $10+6=16$; $16\times 10=160$ et $160+9=169$, le résultat affiché sera 169.
2. La formule saisie est =(B1+6)*B1+9 *(on peut procéder par élimination, c'est la seule des trois formules qui produit le résultat 0 dans la cellule B2).*

3. On remarque que les résultats affichés sont tous des carrés de nombres entiers. On peut conjecturer que si le nombre de départ est un entier, le résultat est le carré d'un entier.

4. Si on note x le nombre de départ, le résultat affiché est $(x+6)\times x+9=x^2+6x+9=(x+3)^2$ qui est bien un carré parfait quand x est entier, la conjecture est ainsi démontrée.

Exercice 4

Affirmation 1

Cette affirmation est vraie, en effet le troisième quartile étant 9 cm, trois quart des carottes de la parcelle B mesurent 9 cm ou moins. Il y a donc au moins trois quart des carottes (c'est à dire 75%) qui mesurent moins de 10 cm.

Affirmation 2

Cette affirmation est fausse en effet la valeur minimum de l'échantillon est 4,5 cm et l'étendue et 9 cm, la valeur maximum est donc 4,5 cm + 9 cm soit 13,5 cm.

Affirmation 3

La longueur moyenne d'une carotte est de

$$\frac{400\times 9{,}5 \quad + \quad 500\times 8{,}8}{400+500}=\frac{3800+4400}{900}=\frac{8200}{900}=\frac{82}{9}=9+\frac{1}{9}\approx 9{,}11$$

Cette valeur moyenne est proche de 9,15 cm mais pas égale, l'affirmation est donc fausse.

On pouvait aussi remarquer que s'il y avait autant de carottes dans chaque échantillon, la moyenne des longueurs serait la moyenne des deux moyennes, c'est à dire 9,15 cm. en rajoutant 100 carottes dans l'échantillon B, en moyenne plus courtes que 9,15 cm, la moyenne de l'ensemble baisse, elle n'est plus égale à 9,15 cm.

Affirmation 4

La médiane de l'échantillon B est de 8,5 cm. Cet échantillon comporte donc au moins 250 carottes de longueur supérieure ou égale à 8,5 cm.

De même l'échantillon A comporte au moins 200 carottes de longueur supérieure ou égale à 10 cm et donc supérieur à 8,5 cm.

Il y a donc au moins 450 carottes (c'est à dire la moitié de l'effectif) de longueur supérieure ou égale à 8,5 cm, la médiane est donc elle même supérieur ou égale à 8,5 cm.

L'affirmation est donc fausse.

Troisième partie (14 points)

Situation 1

1. Analyse du texte du problème :

- Certains mots sont soulignés pour indiquer aux élèves leur importance. Une conséquence possible est que certains élèves ne lisent pas tout le texte et ne tiennent pas ainsi compte du fait qu'il y a trois enfants.

On peut aussi envisager la difficulté du mot « équitablement », le fait que le nombre trois est écrit en lettres, la construction de la phrase (le complément d'objet direct du verbe partager ne suit pas immédiatement le verbe), le fait que le texte affirme que les 20 biscuits seront partagés alors qu'il y aura en réalité un reste de deux biscuits non partagés…

- Incidences du choix des nombres sur la résolution du problème :
    - Le nombre de biscuits (20) est suffisamment petit pour que les élèves envisagent de les dessiner tous, favorisant ainsi les procédures basées sur un dessin
    - Le nombre 20 n'étant pas multiple de 3, la résolution ne peut pas se réduire à restituer un résultat connu de la table de 3.

	Démarche	Erreurs	Origine	Connaissances
Léo	Dessine des bâtons représentant les biscuits par colonne de 3 (les nombres représentent les enfants) puis, constatant qu'il ne peut pas compléter la 7ème colonne, conclut que chaque enfant aura 6 biscuits	Aucune		Sait réaliser une collection de 20 éléments puis dénombrer.
Amy	Dessine les 20 biscuits puis les repère par des nombres : d'abord 1,2,3 pour représenter les trois enfants puis elle change de système en indiquant 4,4,4 pour représenter le 4ème biscuit de chaque enfant. Conclut que chaque enfant aura 7 biscuit puisqu'elle va jusqu'à simuler la distribution d'un 7ème biscuit.	La conclusion est erronée : il est impossible de donner 7 biscuits à chaque enfant.	Plusieurs hypothèses possibles : Elle a considéré que l'énoncé imposait de donner tous les biscuits, ou bien elle n'a pas vérifié sur son schéma que les trois enfants avaient bien la même chose.	Sait réaliser une collection de 20 et écrire la suite des premiers entiers.
Tom	Justifie par une addition écrite en ligne la réponse qu'il donne. Celle-ci a pu être trouvée mentalement parce que « 20 est le double de 10 » est mémorisé (mais d'autres procédures sont possibles)	La conclusion est erronée. Tom a résolu le problème comme s'il n'y avait que deux enfants et non trois.	Le problème peut venir d'une lecture incomplète de l'énoncé. Il se peut aussi que Tom ait réfléchi un certain temps sans parvenir à résoudre le problème et ait fini par oublier la donnée « trois enfants ».	connait la signification de l'écriture additive et sait calculer certaines sommes simples.

	Démarche	Erreurs	Origine	Connaissances
Marin	Écrit le nombre 3 plusieurs fois de suite pour représenter les distributions successives de trois biscuits (un pour chaque enfant). Marin calcul probablement mentalement les sommes successives puisqu'il ne distribue que 2 biscuits à la dernière étape pour parvenir au total de 20	Aucune		Sais calculer mentalement de petites sommes (ou compter de trois en trois). Sait déterminer le complément de 18 à 20.

Nous n'avons pas fait figurer dans le tableau les compétences en terme d'organisation ou d'interprétation dont font preuve les élèves, qui ne nous semblent pas pouvoir être qualifiées de « connaissances mathématiques ».

Situation 2

1. Pour le problème A5 il s'agit de chercher le reste.

Pour les trois autres problèmes on cherche le nombre de parts puis le reste.

2. Les 29 élèves d'une classe veulent former 4 équipes comportant autant de joueur, en faisant jouer le plus possible d'élèves. Combien y aura-t-il d'élèves dans chaque équipe ?

3. Le problème B6 comporte une étape supplémentaire : il faut calculer le nombre total de pantalons commandés avant de chercher le nombre de parts.

On peut noter que pour le problème B6 rien ne dit si le livreur livre une seule commande pour les deux magasins (11 paquets et trois pantalons à l'unité) ou une commande pour chaque magasin (6 paquets et 7 unités pour l'un, 4 paquets et 4 unités pour l'autre). Par ailleurs, la situation est peu réaliste puisque elle ne tient pas compte du fait que les pantalons existent en différentes tailles… exemple typique de faux problème de vie courante.

Situation 3

1. Ce problème met en jeu la division euclidienne. L'écriture en ligne de l'opération traduisant le problème est $890 = 38 \times 23 + 16$.
2. Les deux questions sont importantes parce qu'elles font prendre conscience du fait que la division euclidienne fournit un résultat comportant deux nombres, le quotient et le reste, ayant chacun une signification.
3. Arthur pose une division pertinente pour le problème, il l'effectue correctement *(malgré quelques hésitations dont témoignent les ratures)* et l'interprète correctement. Il pose correctement des additions de plusieurs nombres en tant qu'étapes de sa division

Océane pose une division pertinente pour le problème, elle effectue correctement certaines étapes de cette opération et dresse correctement la table de 23 jusqu'à 23 x 14.

4. La procédure d'Arthur est longue parce que toutes les multiplications nécessaires au calcul de la division euclidienne sont effectuées sous forme d'addition réitérée. Pour faire évoluer sa procédure, on peut songer aux étapes suivantes :
   - Réutiliser les sommes calculées plutôt que recommencer à chaque fois au début (calculer 69 + 23 + 23…
   - Dresser une table du diviseur préalablement au calcul de la division
   - N'écrire que certains multiples clé du diviseur (par exemple 4x23 et 8x23) et compléter en calcul mental.
   - Poser une multiplication plutôt qu'une addition quand il essaie un chiffre pour le quotient.

5. Océane fait pour l'essentiel deux erreurs :
   - Elle trouve 30 et non 20 comme différence entre 89 et 69. Compte tenu des compétences en calcul dont témoigne sa production, il est probable qu'il ne s'agit la que d'une étourderie favorisée par la présence de plusieurs 9 dans l'opération : elle semble avoir effectué 9-6 au lieu de 8-6.
   - Elle accepte un reste (30) supérieur au diviseur dans une étape intermédiaire de la division. *Dès lors, elle ne peut plus terminer correctement sa division, et le fait d'écrire deux chiffres à la fois au quotient ne peut pas être considéré comme une nouvelle erreur mais plutôt comme une adaptation cohérente de la technique à son erreur précédente. Toutefois, le fait de trouver un quotient partiel supérieur à 9, ce qui ne se produit jamais dans la technique usuelle de division euclidienne, aurait pi la conduire à remarquer et corriger son erreur précédente.*

6. Parmi les erreurs de Dylan, on peut citer :
   - Le « 0 » qui n'est pas abaissé derrière le bon nombre et conduit ainsi à une soustraction (20 - 230) qui n'a pas de signification à l'école élémentaire mais qu'il effectue tout de même.
   - Le fait de trouve que « en 20 il va une fois 23 » lors de la recherche du deuxième chiffre du quotient. Dylan ne semble pas envisager que le quotient partiel puisse être zéro.
   - *Le fait d'effectuer la soustraction « 20 - 230 ».*
   - *Le fait d'accepter comme reste intermédiaire un nombre supérieur au diviseur.*
   - *Le manque de soucis de cohérence sur les ordres de grandeurs.*
   - ...