

Enseigner les grandeurs et leurs mesures : l'exemple de l'aire.

Quand on cherche à expliquer ce qu'est l'aire, on peut envisager plusieurs approches :

- **Appui sur l'usage social.**

« Quand on dit que ces deux figures ont la même aire, on sait de quoi on parle ».

Cela peut paraître stupide, mais c'est pourtant ainsi qu'on considère la longueur à l'école élémentaire... et cela fonctionne très bien. Quand des enfants de CP ou CE1 disent que le crayon rouge est plus long (ou plus grand) que le crayon jaune, ils savent ce qu'ils veulent dire. Cette connaissance implicite s'appuie sur de nombreuses expériences de comparaisons de longueurs (ou de distance) dans la vie courante et les jeux :

L'école est plus loin que la maison de Mamie.



Nathalie est plus grande que Jean (malgré l'ambiguïté avec l'âge).

Tirage à la courte paille, jeu de pétanque...


On ne rencontre pas de telles occasions pour les aires (on peut évoquer la comparaison de deux parts de gâteau, mais les enfants savent bien que l'épaisseur joue un rôle : ce sont les volumes que l'on compare), c'est pourquoi cette approche ne peut être utilisée.

- **Approche par la comparaison.**

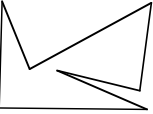

L'aire y est introduite de façon implicite, c'est la façon de comparer deux surfaces selon leur aire qui est introduite explicitement :

Surface A :  Surface B : 


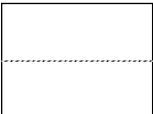
La surface A recouvre entièrement la surface B, l'aire de A est plus grande que celle de B :

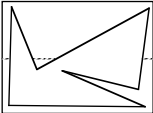


On explicite également une façon de transformer les surfaces sans modifier leur aire :

Surface C :  Surface A : 

Aucune des deux surfaces ne peut recouvrir entièrement l'autre, mais si on découpe A comme

ceci  et si on assemble les morceaux ainsi : 

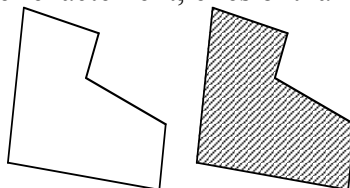
on obtient une surface qui recouvre entièrement C : 

L'aire de A est plus grande que l'aire de C.

Cette approche, privilégiée par les textes officiels de 2002, consiste à proposer en classe des expériences de comparaison d'aire par découpage, assemblage, superposition dont on espère qu'elles auront pour l'aire le rôle fondateur que les expériences sociales de comparaison ont eu pour les longueurs. Son intérêt est qu'elle confronte directement les élèves aux aspects essentiels de l'idée d'aire. Sa principale difficulté est liée aux contraintes du temps scolaire. Les expériences sociales de comparaisons de longueur s'étalent sur des années, donnant ainsi de multiples occasions de réajuster une compréhension erronée ou incomplète. Les expériences scolaires analogues concernant les aires se réduisent généralement à une ou deux séances.

Certains ouvrages voulant s'inscrire dans cette approche ajoutent une difficulté en proposant comme premier exemple de comparaison d'aires un cas d'égalité :

Ces deux surfaces peuvent se superposer exactement, elles ont la même aire.



Ceci n'aide guère à comprendre ce qu'est l'aire, car deux figures superposables ont certes la même aire, mais elles ont aussi en commun leur périmètre ou toute autre caractéristique géométrique à laquelle on songera (plus grande distance entre deux points de la figure, plus petit carré dans lequel on peut faire tenir la figure...).

- **Usage des définitions du dictionnaire ou d'autres documents de référence.**

- Aire : Portion limitée de surface, nombre qui la mesure. V. Superficie. (*Petit Robert 1981*).
- Superficie : Nombre caractérisant l'étendue d'une surface. (*idem*).
- Aire : Mesure d'une surface limitée par des lignes. (*Petit Larousse 1978*).
- Aire : Surface, superficie. (*Dictionnaire associé au correcteur orthographique Antidote*).
- Superficie Valeur obtenue en mesurant une surface plane. Surface plane d'une chose considérée du point de vue de son étendue. (*idem*).
- L'aire est la propriété des surfaces liée à leur étendue (*Dico math, Cap math CMI, Hatier*).

Les « définitions » obtenues ne sont guère compréhensibles que par un lecteur qui sait déjà de quoi il s'agit...ce qui n'est pas le cas des élèves à qui on cherche à enseigner la notion d'aire.

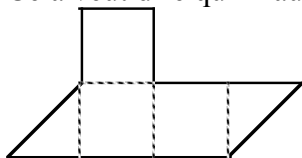
- **Définition par la mesure.**

Voici un centimètre-carré. C'est un carré, ses côtés mesurent un centimètre de long.



L'aire de cette figure est de 4 centimètres-carrés.

Cela veut dire qu'il faut exactement 4 centimètres-carrés pour la recouvrir.

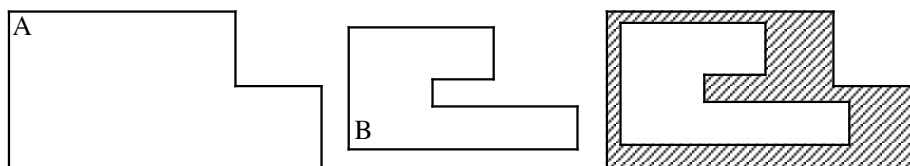


Cette approche a l'avantage de fournir une définition explicite de ce dont on parle...et l'inconvénient que cette définition est fautive (on définit la mesure de l'aire, l'unité étant le centimètre-carré et non l'aire).

Le fait que cette définition soit fautive n'est pas réhivitoire : en ce qui concerne les longueurs on réussit très bien à travailler en l'absence de toute définition, et on utilise sans problème l'expression « la longueur de ce crayon est 5 cm » qui confond la longueur et sa mesure.

Plus sérieux est le risque, l'aire étant définie comme un nombre, de se limiter aux activités calculatoires, voire à l'usage de formules.

Ce risque est renforcé par les textes de 2008 qui mettent l'accent sur la mesure et particulièrement sur l'usage des formules, mais ce n'est pas une fatalité. Dans l'exemple qui suit, on s'appuie sur la définition de l'aire comme un nombre, mais on n'effectue aucun calcul.



Pour recouvrir la surface A, il faut tous les centimètres carrés qui recouvrent B plus ceux qui recouvrent la zone hachurée : L'aire de A est donc plus grande que celle de B.

- **Approche par le mesurage effectif.**

Il n'est pas absurde de penser que l'usage d'une montre ou d'un chronomètre, d'une balance (surtout s'il s'agit d'une balance de Roberval), aident à construire l'idée des grandeurs correspondantes ou en tout cas consolident cette idée.

Rien d'analogue n'est possible avec les aires car il n'existe pas d'instrument de mesure de l'aire. L'aire ne peut être mesurée que par un pavage effectif ou déduite par le calcul à partir de mesures de longueurs... ce qui renforce le risque de dérive vers un usage exclusif des formules.

- **Référence aux mathématiques savantes.**

Pour le plaisir, voici ce qu'est une aire pour le dictionnaire des mathématiques (PUF 1992).

Ce n'est pas d'un grand secours à l'école élémentaire, ni pour les élèves ni pour le maître.

Le seul intérêt pour notre propos est de faire sentir à quel point la nécessité absolue pour le mathématicien professionnel d'éliminer les ambiguïtés liées à l'usage courant des notions peut se payer cher en terme de complexité.

► *Aire d'une portion Σ de surface.* — Lorsqu'elle a un sens, l'aire d'une portion Σ de surface est le nombre réel $A(\Sigma)$ défini par l'intégrale de surface $\iint_{\Sigma} dS$. Si l'équation de Σ est de la forme $z = f(x, y)$ et si D est la projection de Σ sur le plan xOy , alors $A(\Sigma) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$ où $p = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Si Σ admet pour représentation paramétrique $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ et $z = h(u, v)$ où $(u, v) \in \Delta$, alors :

$$A(\Sigma) = \iint_{\Delta} \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| du dv.$$

L'aire dans les programmes récents de l'école élémentaire.

En 2008 :

Dans le programme. Les aires : comparaison de surfaces selon leurs aires, unités usuelles, conversions ; formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle.

Dans la répartition par année.

CM1 : Mesurer ou estimer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé. Classer et ranger des surfaces selon leur aire.

CM2 : Calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle en utilisant la formule appropriée. Connaître et utiliser les unités d'aire usuelles (cm^2 , m^2 et km^2).

En 2002 :

- Classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire, soit par superposition des surfaces, soit par découpage et recollement des surfaces, soit par pavage des surfaces avec une surface de référence.
- Construire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable).
- Différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire.
- Mesurer l'aire d'une surface par un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (d'aire une unité) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement).
- Calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côté au moins est de dimension entière.
- Connaître et utiliser les unités usuelles: cm^2 , dm^2 , m^2 et km^2 .
- Connaître et utiliser quelques égalités:
 $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$; $1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$; $1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$.