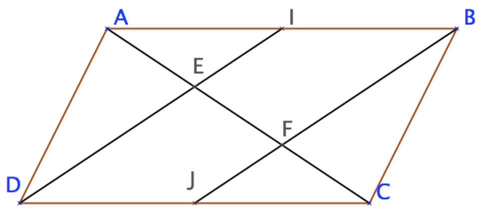
Ce document comporte plusieurs réponses rédigées pour un même problème de démonstration géométrique. Ces réponses sont soumises à votre critique.

L'objectif du travail est d'expliciter les «règles du jeu» de ce type de problème, tout en commençant à élaborer un répertoire des propriétés les plus souvent utilisées et donc indispensables à mémoriser pendant la préparation du CRPE.

Problème 1 :
ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [DC].
(DI) et (AC) se coupent en E.
(BJ) et (AC) se coupent en F.
Démontrer que E est le milieu de [AF].



Version 1
J'ai fait plusieurs figures et reporté les mesures AE et EF dans le tableau ci-dessous :

Numéro de la figure	1	2	3	4	5	6	7
AE en mm	29	43	21	67	30	17	15
EF en mm	29	43	21	67	30	17	15

On constate que sur toutes les figures AE = EF, on en déduit donc que E est le milieu de [AF].

Dans cette version, c'est la règle du jeu qui est en cause. Dans toutes les autres sciences qu'en mathématiques, ce type de preuve est valide : quand une affirmation semble vraie on la teste, et si elle résiste à des expériences variées elle est considérée comme vraie.
Dans un problème de démonstration, ce qui est attendu est un enchaînement de déductions permettant de conclure en utilisant comme points de départ les données de l'énoncé et les théorèmes connus.
Par ailleurs, non seulement il ne suffit pas de vérifier sur plusieurs figures que l'égalité est vérifiée, mais chacune des égalités consignées dans le tableau serait également rejetée au motif qu'elle n'est pas obtenue par un raisonnement ou un calcul à partir des données mais à l'aide des instruments de mesure. Toute valeur résultant d'un mesurage effectif n'est connue qu'avec une certaine incertitude (par exemple, quand on mesure un segment de 40 mm à l'aide de la règle, on est en général certain, si la mesure est faite soigneusement, que la longueur de ce segment est entre 39 et 41 mm).

Version 2
Dans le triangle ABF, <u>la droite (DI)</u> passe par le milieu du côté [AB] et <u>est parallèle au côté [BF]</u> donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.
Cette version pourrait être une étape d'une démonstration correcte. La rédaction évoque sans ambiguïté le théorème suivant : «Dans un triangle, si droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, elle passe par le milieu du troisième côté».
Ce théorème existe réellement dans le corpus des théorèmes géométriques du collège, et son application au triangle ABF est rédigée en montrant bien toutes les conditions nécessaires, et rien de plus. Dans ces conditions, le fait que le théorème ne soit pas cité explicitement n'est pas gênant.
En revanche. La démonstration n'est pas valide parce que l'affirmation soulignée ne fait pas partie de l'énoncé et n'est pas non plus une reformulation évidente de l'énoncé : elle doit donc être prouvée avant d'être utilisée.
Ceci nous amène à une caractéristique importante des démonstrations correctes : elles comportent des répétitions. La plupart des affirmations qui y figurent sont énoncées une première fois comme conclusion d'une étape:
«bla bla bla…donc (DI) est parallèle à (BF)»,
elles sont ensuit énoncées une ou plusieurs autres fois comme éléments d'une autre étape :
« (DI) est parallèle à (BF) et bla bla bla donc bla bla bla».

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Version 3

- B et D sont deux sommets opposés d'un parallélogramme, I et J sont les milieux de deux côtés opposés du même parallélogramme, donc les droites (BJ) et (DI) sont parallèles, ce qui revient à dire que (DI) est parallèle à (BF)

- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

La deuxième étape de cette démonstration est identique à l'étape unique de la version 2.
Elle est entièrement correcte puisque l'affirmation (DI) // (BF) est démontrée à l'étape précédente.
En revanche la première étape n'est pas correcte : il n'existe aucune propriété classique utilisant les données évoquées ici (deux sommets opposés et les milieux de deux côtés opposés d'un parallélogramme).
La propriété invoquée n'est pas acceptable même si elle est vraie*. Imaginons en effet qu'on décide d'accepter les propriétés non classiques pour peu qu'elles soient vraies. Toute démonstration se résumerait alors à recopier l'énoncé et à affirmer que dans ces conditions, on sait que la conclusion est vraie. Pour éviter cette situation absurde il est nécessaire à tout groupe de personne faisant des mathématiques de convenir d'un corpus de théorèmes qui seront considérés comme vrais dans ce groupe, sans avoir à être démontrés à nouveau. Pour la communauté mathématique du CRPE, ce corpus est constitué par les théorèmes au programme du collège.*

Version 4

- J'utilise dans l'étape suivante le fait que les droites (DI) et (BF) sont parallèles. Il faudrait le prouver au préalable pour que la démonstration soit complète, je n'y parviens pas.

- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Cette version est très supérieure aux précédentes. La deuxième étape est correcte et la première montre à la fois que l'auteur à compris qu'il était nécessaire de prouver que (DI) // (BF) et qu'il résiste à la tentation de bricoler un théorème ad hoc pour faire semblant de l'avoir prouvé. C'est la première des versions proposées ici qui rapporterait des points à son auteur lors d'une épreuve de CRPE.

Version 5

E sera le milieu de [AF] si on parvient à prouver que (DI) // (BJ) car on pourra alors utiliser le théorème de la droite des milieux. Pour prouver que ces droites sont parallèles, il faut prouver que le quadrilatère BIDJ est un parallélogramme ce qui est le cas puisqu'il a deux côtés opposés parallèles et égaux (BI et DJ) parce que ces côtés sont eux mêmes les moitiés de deux côtés opposés d'un autre parallélogramme : ABCD est un parallélogramme par hypothèse et de plus I est le milieu de [AB] et J celui de [CD]).
Un style de rédaction à éviter à tout prix, incompréhensible.

Version 6

D'après les propriétés des parallélogrammes, (DI) est parallèle à (BJ).
On peut alors utiliser le théorème de la droite des milieux qui permet d'affirmer que E est le milieu de [AF]
Beaucoup trop vague : quelles propriétés des parallélogrammes utilise-t-on, quelle propriété liée aux milieux dans un triangle, et appliquée à quel triangle ?

Version 7

- I est le milieu de AB donc BI $= \frac{AB}{2}$. De même DJ $= \frac{DC}{2}$
- ABCD est un parallélogramme donc AB = CD. il en résulte que $\frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$, donc que BI = DJ.
- Les droites AB et DC sont parallèles puisque ABCD est un parallélogramme. Or I est sur AB et J est sur DC donc BI et DJ sont parallèles.
- Les côtés opposés BI et DJ du quadrilatère non croisé BIDJ sont à la fois parallèles et de même longueur, donc BIDJ est un parallélogramme.
- BIDJ est un parallélogramme, donc DI est parallèle à BJ (et donc à BF qui est la même droite).
- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Cette version a comme seul défaut de ne pas respecter les conventions d'écriture : [AB] pour le segment d'extrémités A et B, (AB) pour la droite passant par A et par B, AB pour la longueur du segment [AB].
Le jury du CRPE est traditionnellement très exigeant sur ce point (cf rapports de jurys) probablement même trop exigeant : si on écrit «le segment AB», l'absence de crochets ne crée aucune ambiguïté sur le sens, elle serait pourtant pénalisée.
Moralité : dans un concours, même quand le jury a tort, il a raison.
Voici une version rectifiée, conforme aux usages sur ce point :

- I est le milieu de [AB] donc BI = $\frac{AB}{2}$. De même DJ = $\frac{DC}{2}$
- ABCD est un parallélogramme donc AB = CD. il en résulte que $\frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$, donc que BI = DJ.
- Les droites (AB) et (DC) sont parallèles puisque ABCD est un parallélogramme. Or I est sur (AB) et J est sur (DC) donc (BI) et (DJ) sont parallèles.
- Les côtés opposés [BI] et [DJ] du quadrilatère non croisé BIDJ sont à la fois parallèles et de même longueur, donc BIDJ est un parallélogramme.
- BIDJ est un parallélogramme, donc (DI) est parallèle à (BJ) (et donc à (BF) qui est la même droite).
- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Version 8

- A est un point de (EC) et I est un point de (ED). De plus (AI) // (DC) , on peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles EAI et EDC : on a donc $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$
- $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ donc $AE = \frac{1}{2}EC$ ou encore $AE = \frac{1}{3}AC$
- On montre de la même façon que $CF = \frac{1}{3}AC$
- $EF = AC - AE - FC = AC - \frac{1}{3}AC - \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}AC$
- $AE = \frac{1}{3}AC$ et $EF = \frac{1}{3}AC$ donc AE = EF.
- AE = EF et E est sur [AF] donc E est le milieu de [AF].

Cette version est correcte mais un peu trop laconique. Le théorème de Thalès ne permet pas de conclure directement que $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ mais que $\frac{AE}{EC} = \frac{AI}{CD}$, encore faut-il montrer que CD = 2 AI avant de conclure.
Cependant, les points les plus difficiles de la démonstration sont mentionnés, cette version serait donc probablement acceptée, avec une petite pénalité pour le laconisme excessif.

Version 9

Le parallélogramme EBCD est symétrique par rapport à son centre O, intersection des diagonales.
Il en résulte que, dans la symétrie de centre O, D et I sont respectivement symétriques de B et J.
Les droites (DI) et (BJ) sont donc symétriques par rapport à O par conséquent elles sont parallèles.

Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu de [AB], elle est parallèle au côté [BF] (qui est sur la droite (BJ)) donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est alors le points E.
Rien à dire, ce candidat impressionne le jury.

Version 10

Soit O l'intersection des diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD.
ABCD est un parallélogramme, donc ses diagonales ce coupent en leur milieu : O est le milieu de [BD] et celui de [AC].
dans le triangle ABD O est le milieu de [BD] et I celui de [AB] par conséquent [AO] et [DI] sont les médianes issues de A et de D. Leur intersection E est donc le centre de gravité de ABD.

E est le centre de gravité de ABD donc $AE = \frac{2}{3}AO$

On prouve de la même façon que $FC = \frac{2}{3}CO$

O est le milieu de [AC] donc $AO = CO = \frac{AC}{2}$ il en résulte que $AE = CF = \frac{AC}{3}$

$EF = AC - AE - FC = AC - \frac{AC}{3} - \frac{AC}{3} = \frac{AC}{3}$

On a donc EF = AE, or E est sur [AF] c'est donc le milieu de [AF].

Version correcte également.

Version 11
On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux or, par hypothèse, ABCD est un parallélogramme dont [AB] et [DC] sont deux côtés opposés.
On en conclut que (AB) // (DC)

Par hypothèse I est le milieu de [AB] donc les droites (BI) et (AB) sont confondues.
Par hypothèse J est le milieu de [DC] donc les droites (DJ) et (DC) sont confondues.
(BI) est confondue avec (AB), (DJ) est confondue avec (DC), par ailleurs (AB) et (DC) sont paralllèles, donc (BI) et (DJ) sont parallèles.

Par hypothèse I est le milieu de [AB] donc BI = AB/2
Par hypothèse J est le milieu de [CD] donc DJ = CD/2
On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux de même longueur or, par hypothèse, ABCD est un parallélogramme dont [AB] et [DC] sont deux côtés opposés.
On en conclut que AB // DC
Comme AB = DC, AB/2 = DC/2
On a : BI = AB/2 ; AB/2 = DC/2 ; DC/2 = DJ donc BI : DJ

On sait qu'un quadrilatère non croisé dont deux côtés opposés sont à la fois parallèles et de même longueur est un parallélogramme.
Or, le quadrilatère BIDJ est non croisé et on a montré ci dessus que ses côtés opposés [BI] et [DJ] sont parallèles.
Donc, le quadrilatère BIDJ est un parallélogramme.

On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux or on vient de prouver que BIDJ est un parallélogramme et [DI] et [BJ] en sont deux côtés opposés.
On en conclut que (DI) // (BJ).

Par hypothèse les droites (BJ) et (AC) se coupent en F, F est donc un point de (BJ).
F est un point de (BJ) donc les droites (BF) et (BJ) sont confondues.
On a montré que (DI) // (BJ) or (BF) et (BJ) sont confondues donc (DI) // (BF).

On sait qu'une droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle et qui est parallèle à un autre côté de ce triangle passe par le milieu du troisième côté or, la droite (DI) passe par le milieu I du côté [AB] du triangle ABF et est parallèle au côté [BF], donc elle passe par le milieu du côté [AF].

La droite (DI) passe par le milieu de [AF].
F est l'intersection de (BJ) et (AC) donc F est sur (AC), il en résulte que [AF] est porté par la droite (AC).
Le milieu de [AF], intersection de (DI) et (AF) est donc aussi l'intersection de (DI) et [AC], c'est le point E.
CQFD
Beaucoup trop long. A force de vouloir tout prouver on ne distingue plus l'essentiel. A éviter, d'autant que même si le résultat est accepté, rédiger ce type de preuve consomme énormément de temps pour un résultat qui n'est pas meilleurs que les précédents.