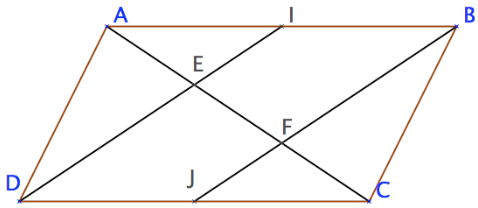
Ce document comporte plusieurs réponses rédigées pour un même problème de démonstration géométrique. Ces réponses sont soumises à votre critique.

L'objectif du travail est d'expliciter les «règles du jeu» de ce type de problème, tout en commençant à élaborer un répertoire des propriétés les plus souvent utilisées et donc indispensables à mémoriser pendant la préparation du CRPE.

Problème 1 :
ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [DC].
(DI) et (AC) se coupent en E.
(BJ) et (AC) se coupent en F.
Démontrer que E est le milieu de [AF].



Version 1
J'ai fait plusieurs figures et reporté les mesures AE et EF dans le tableau ci-dessous :

Numéro de la figure	1	2	3	4	5	6	7
AE en mm	29	43	21	67	30	17	15
EF en mm	29	43	21	67	30	17	15

On constate que sur toutes les figures AE = EF, on en déduit donc que E est le milieu de [AF].

Version 2
Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Version 3
- B et D sont deux sommets opposés d'un parallélogramme, I et J sont les milieux de deux côtés opposés du même parallélogramme, donc les droites (BJ) et (DI) sont parallèles, ce qui revient à dire que (DI) est parallèle à (BF)

- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Version 4
- J'utilise dans l'étape suivante le fait que les droites (DI) et (BF) sont parallèles. Il faudrait le prouver au préalable pour que la démonstration soit complète, je n'y parviens pas.

- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Version 5
E sera le milieu de [AF] si on parvient à prouver que (DI) // (BJ) car on pourra alors utiliser le théorème de la droite des milieux. Pour prouver que ces droites sont parallèles, il faut prouver que le quadrilatère BIDJ est un parallélogramme ce qui est le cas puisqu'il a deux côtés opposés parallèles et égaux (BI et DJ) parce que ces côtés sont eux mêmes les moitiés de deux côtés opposés d'un autre parallélogramme : ABCD est un parallélogramme par hypothèse et de plus I est le milieu de [AB] et J celui de [CD]).

Version 6
D'après les propriétés des parallélogrammes, (DI) est parallèle à (BJ).
On peut alors utiliser le théorème de la droite des milieux qui permet d'affirmer que E est le milieu de [AF]

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Version 7

- I est le milieu de AB donc BI $=\frac{AB}{2}$. De même DJ $=\frac{DC}{2}$
- ABCD est un parallélogramme donc AB = CD. il en résulte que $\frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$, donc que BI = DJ.
- Les droites AB et DC sont parallèles puisque ABCD est un parallélogramme. Or I est sur AB et J est sur DC donc BI et DJ sont parallèles.
- Les côtés opposés BI et DJ du quadrilatère non croisé BIDJ sont à la fois parallèles et de même longueur, donc BIDJ est un parallélogramme.
- BIDJ est un parallélogramme, donc DI est parallèlle à BJ (et donc à BF qui est la même droite).
- Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu du côté [AB] et est parallèle au côté [BF] donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est donc le point E.

Version 8

- A est un point de (EC) et I est un point de (ED). De plus (AI) // (DC) , on peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles EAI et EDC : on a donc $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$
- $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$ donc $AE = \frac{1}{2}EC$ ou encore $AE = \frac{1}{3}AC$
- On montre de la même façon que $CF = \frac{1}{3}AC$
- $EF = AC - AE - FC = AC - \frac{1}{3}AC - \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}AC$
- $AE = \frac{1}{3}AC$ et $EF = \frac{1}{3}AC$ donc AE = EF.
- AE = EF et E est sur [AF] donc E est le milieu de [AF].

Version 9

Le parallélogramme EBCD est symétrique par rapport à son centre O, intersection des diagonales.
Il en résulte que, dans la symétrie de centre O, D et I sont respectivement symétriques de B et J.
Les droites (DI) et (BJ) sont donc symétriques par rapport à O par conséquent elles sont parallèles.

Dans le triangle ABF, la droite (DI) passe par le milieu de [AB], elle est parallèle au côté [BF] (qui est sur la droite (BJ)) donc elle passe par le milieu du côté [AF] qui est alors le points E.

Version 10

Soit O l'intersection des diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère BCD.
ABCD est un parallélogramme, donc ses diagonales ce coupent en leur milieu : O est le milieu de [BD] et celui de [AC].
dans le triangle ABD O est le milieu de [BD] et I celui de [AB] par conséquent [AO] et [DI] sont les médianes issues de A et de D. Leur intersection E est donc le centre de gravité de ABD.

E est le centre de gravité de ABD donc $AE = \frac{2}{3}AO$

On prouve de la même façon que $FC = \frac{2}{3}CO$

O est le milieu de [AC] donc $AO = CO = \frac{AC}{2}$ il en résulte que $AE = CF = \frac{AC}{3}$

$$EF = AC - AE - FC = AC - \frac{AC}{3} - \frac{AC}{3} = \frac{AC}{3}$$

On a donc EF = AE, or E est sur [AF] c'est donc le milieu de [AF].

Version 11
On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux or, par hypothèse, ABCD est un parallélogramme dont [AB] et [DC] sont deux côtés opposés.
On en conclut que (AB) // (DC)

Par hypothèse I est le milieu de [AB] donc les droites (BI) et (AB) sont confondues.
Par hypothèse J est le milieu de [DC] donc les droites (DJ) et (DC) sont confondues.
(BI) est confondue avec (AB), (DJ) est confondue avec (DC), par ailleurs (AB) et (DC) sont paralllèles, donc (BI) et (DJ) sont parallèles.

Par hypothèse I est le milieu de [AB] donc BI = AB/2
Par hypothèse J est le milieu de [CD] donc DJ = CD/2
On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux de même longueur or, par hypothèse, ABCD est un parallélogramme dont [AB] et [DC] sont deux côtés opposés.
On en conclut que AB // DC
Comme AB = DC, AB/2 = DC/2
On a : BI = AB/2 ; AB/2 = DC/2 ; DC/2 = DJ donc BI : DJ

On sait qu'un quadrilatère non croisé dont deux côtés opposés sont à la fois parallèles et de même longueur est un parallélogramme.
Or, le quadrilatère BIDJ est non croisé et on a montré ci dessus que ses côtés opposés [BI] et [DJ] sont parallèles.
Donc, le quadrilatère BIDJ est un parallélogramme.

On sait que les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux or on vient de prouver que BIDJ est un parallélogramme et [DI] et [BJ] en sont deux côtés opposés.
On en conclut que (DI) // (BJ).

Par hypothèse les droites (BJ) et (AC) se coupent en F, F est donc un point de (BJ).
F est un point de (BJ) donc les droites (BF) et (BJ) sont confondues.
On a montré que (DI) // (BJ) or (BF) et (BJ) sont confondues donc (DI) // (BF).

On sait qu'une droite qui passe par le milieu d'un côté d'un triangle et qui est parallèle à un autre côté de ce triangle passe par le milieu du troisième côté or, la droite (DI) passe par le milieu I du côté [AB] du triangle ABF et est parallèle au côté [BF], donc elle passe par le milieu du côté [AF].

La droite (DI) passe par le milieu de [AF].
F est l'intersection de (BJ) et (AC) donc F est sur (AC), il en résulte que [AF] est porté par la droite (AC).
Le milieu de [AF], intersection de (DI) et (AF) est donc aussi l'intersection de (DI) et [AC], c'est le point E.
CQFD

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.