Problème n°1

On appelle K l'ensemble des nombres décimaux qui peuvent s'écrire avec deux chiffres après la virgule.

12,45 fait partie de l'ensemble K, ainsi que 3 5,400 et 7,8 car ceux-ci peuvent s'écrire respectivement 3,00 5,40 et 7,80.

Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse.

Affirmation A :
La somme de deux nombres appartenant à K est un nombre appartenant à K.

Affirmation B :
La somme de deux nombres n'appartenant pas à K est un nombre n'appartenant pas à K.

Affirmation C :
Le produit de deux nombres appartenant à K n'appartient pas à K.

Affirmation D :
On peut trouver des nombres x et y n'appartenant ni l'un ni l'autre à K et dont le produit xy appartient à K.

Problème n°2

On donne un carré, construire à la règle non graduée et au compas un triangle équilatéral dont un sommet coïncide avec un sommet du carré et dont les deux autres sommets sont sur les côtés du carré.

Problème n°3

On lance deux fois de suite un dé ordinaire. Quelle est la probabilité pour que la somme des deux nombres tirés soit égale à 7 ?

Problème n°4

On considère les nombres entiers suivants :
$A = 4^6$ $\quad B = 4^6 - 1$ $\quad C = 4^9 - 4^3$

Donner l'écriture de chacun de ces nombres en base 4.

Problème n°5

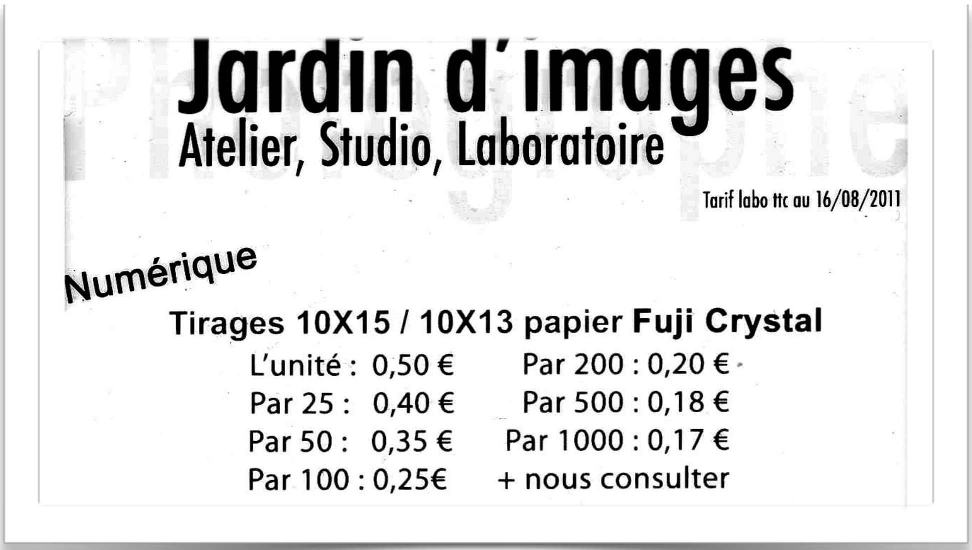
ABCD est un parallélogramme dont la diagonale [BD] et le côté [BC] sont perpendiculaires.
Le côté [AB] mesure 10 cm et le côté [AD] mesure 8 cm.

Calculer la mesure exacte de la longueur AC, puis son arrondi au millimètre près.

Problème n°6

Dans la division euclidienne du nombre entier A par 7, le reste est 5.
On effectue la division euclidienne du même nombre A par 14.
Quelles sont les valeurs possibles du reste de cette division ?

Problème n°7



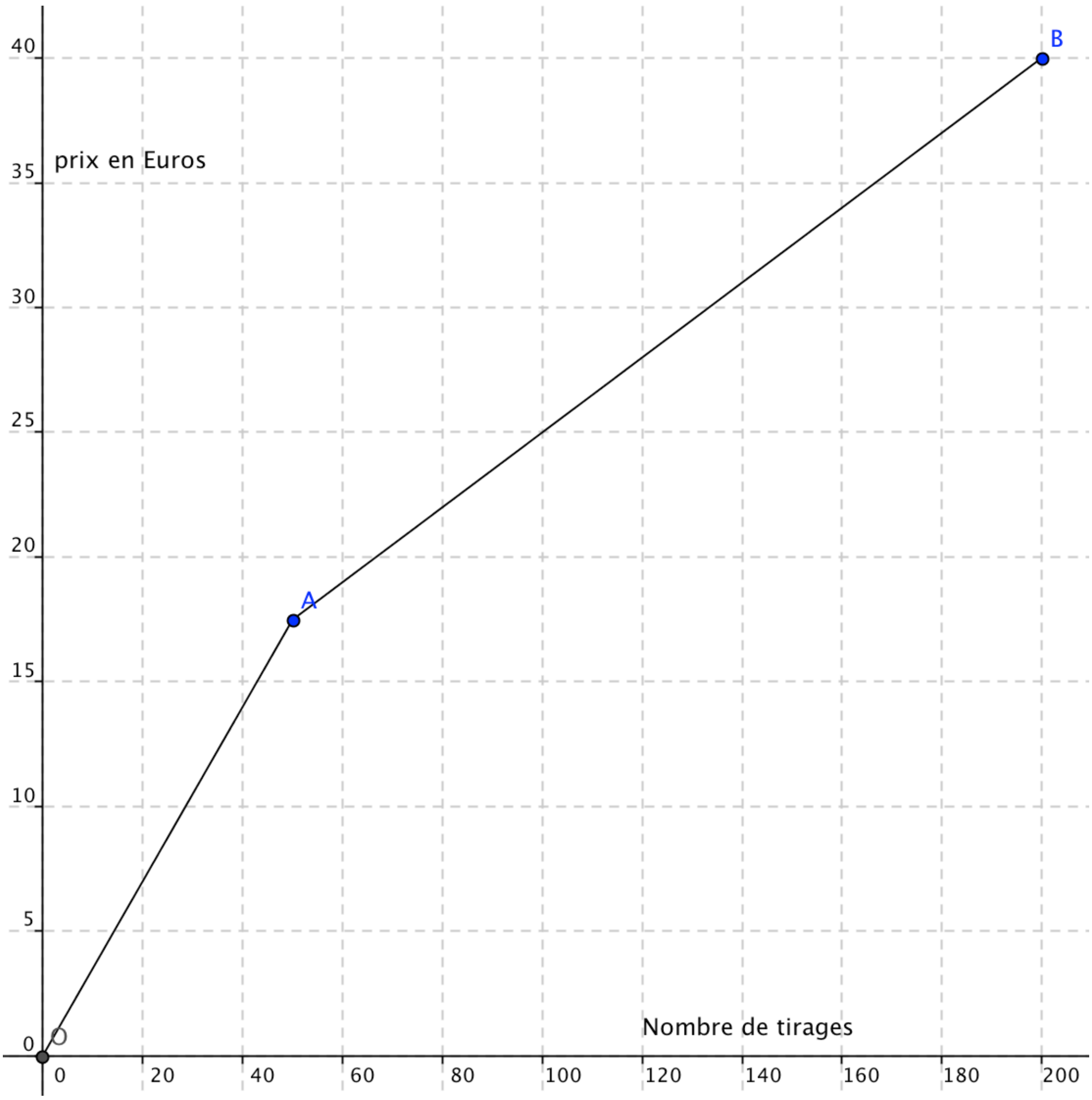
Le tarif ci-dessus indique le prix du tirage sur papier de photographies numériques.
L'interprétation que le commerçant donne de ce document est la suivante :

Pour un tirage de 1 à 24 photos, le prix unitaire est 0,50 €
Pour un tirage de 25 à 49 photos, le prix unitaire est 0,40 €
Pour un tirage de 50 à 99 photos, le prix unitaire est 0,35 €
Pour un tirage de 100 à 199 photos, le prix unitaire est 0,25 €

Représenter graphiquement le prix à payer en fonction du nombre de photos, pour un nombre de photos allant jusqu'à 150.

Problème n°8

Ce problème est la suite du n° 7.
Pour éviter les paradoxes de sa précédente tarification (il revenait moins cher de faire tirer 25 photos que 22) le photographe a modifié ses tarifs.
Le graphique ci-dessous représente le prix à payer en fonction du nombre de tirages, pour un nombre de tirage allant jusqu'à 200.



Le point A indique que le prix de 50 tirages est 17,5 €.
Le point B indique que le prix de 200 tirages est 40 €.
On admettra que le graphique est constitué de deux segments de droites.

Rédiger dans un langage simple le tarif auquel correspond ce graphique.

Problème n°9

Un photographe propose d'effectuer des tirages dans les formats suivants.

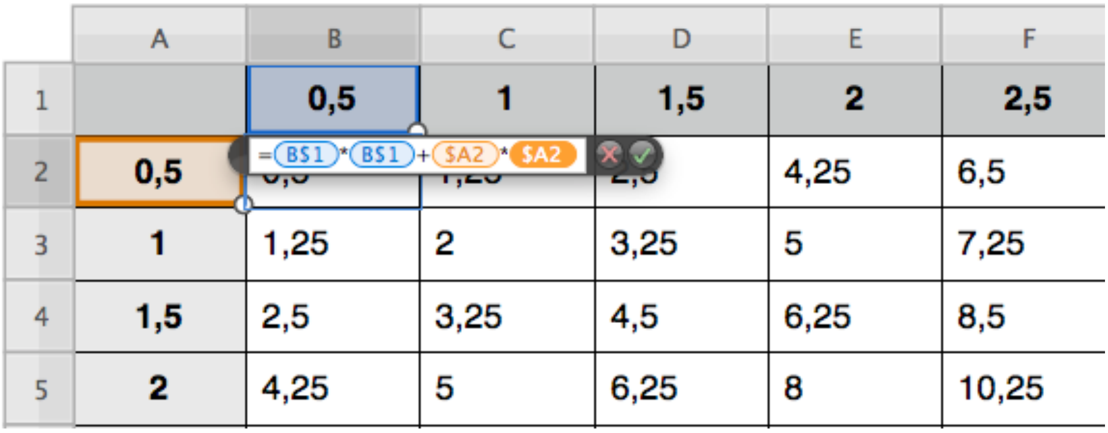
10 x 13	10 x 15	13 x 18	15 x 21	18 x 24	20 x 30
30 x 45	40 x 60	50 x 70	60 x 80.		

L'appellation 10 x 13 désigne un rectangle de largeur 10 cm et de longueur 13 cm.
Certains de ces formats sont homothétiques, ce qui signifie que l'un des deux est un agrandissement de l'autre.
Sans utiliser de calculatrice, classer les formats proposés selon ce critère (tous les formats homothétiques entre eux constituent donc une catégorie).

Problème n°10

On s'intéresse à des losanges dont les deux diagonales mesurent un nombre entier de cm. Le tableau qui suit a été obtenu à l'aide d'une feuille de calcul en écrivant, comme le montre la première figure, la formule « =B$1*B$1+$A2*$A2 » dans la case B2 puis recopiant cette formule en tirant vers la droite et vers le bas.

La deuxième figure montre le même tableau complet.



	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
0,5	0,5	1,25	2,5	4,25	6,5	9,25	12,5
1	1,25	2	3,25	5	7,25	10	13,25
1,5	2,5	3,25	4,5	6,25	8,5	11,25	14,5
2	4,25	5	6,25	8	10,25	13	16,25
2,5	6,5	7,25	8,5	10,25	12,5	15,25	18,5
3	9,25	10	11,25	13	15,25	18	21,25
3,5	12,5	13,25	14,5	16,25	18,5	21,25	24,5
4	16,25	17	18,25	20	22,25	25	28,25

Montrer comment on peut, à l'aide de ce tableau, déterminer combien il existe de losanges différents (c'est à dire non superposables) dont les diagonales mesurent un nombre entier de centimètres et dont le périmètre est inférieur à 12 centimètres.

Solution du problème n°1

Affirmation A :
La somme de deux nombres appartenant à K est un nombre appartenant à K.

L'affirmation A est vraie.
On peut s'appuyer sur l'algorithme de l'addition posée : on écrit les deux nombres sous leur forme décimale avec deux chiffres après la virgule, leur somme a également deux chiffres après la virgule (qui peuvent éventuellement être des zéros, ce qui n'empêche pas la somme d'appartenir à K).

On peut aussi utiliser l'écriture fractionnaire : un nombre appartenant à K est un nombre qui peut se mettre sous la forme $\frac{a}{100}$ où a est un entier.

La somme de deux nombres appartenant à K s'écrit alors $\frac{a}{100}+\frac{b}{100}$ ou a et b sont des entiers, elle est donc égale à $\frac{a+b}{100}$, or $a+b$ est un entier, la somme appartient donc à K

Affirmation B :
La somme de deux nombres n'appartenant pas à K est un nombre n'appartenant pas à K.

L'affirmation est fausse. Un contre-exemple suffit à le prouver.
0,009 et 0,001 n'appartiennent ni l'un ni l'autre à K, mais leur somme est 0,01, qui appartient à K.

Affirmation C :
Le produit de deux nombres appartenant à K n'appartient pas à K.

Cette affirmation est fausse (ce qui ne signifie pas qu'elle n'est vraie dans aucun cas, mais qu'elle n'a pas le caractère général auquel elle prétend : elle n'est pas vraie pour tous les nombres appartenant à K).
En effet, 2 et 3 appartiennent à K ainsi que 6, leur produit.

Affirmation D :
On peut trouver des nombres x et y n'appartenant ni l'un ni l'autre à K et dont le produit xy appartient à K.

Cette affirmation est vraie. Pour le prouver, il suffit de trouver deux nombres qui conviennent.
Pour ce faire, l'écriture fractionnaire est plus commode.
Nous allons chercher deux nombres de la forme $\frac{a}{1000}$ et $\frac{b}{1000}$, a et b n'étant ni l'un ni l'autre multiple de 10 (sinon, les fractions pourraient se simplifier par 10 et les nombres appartiendraient à K).
Le produit est égal à $\frac{a}{1000}\times\frac{b}{1000}$, soit $\frac{ab}{1\,000\,000}$.

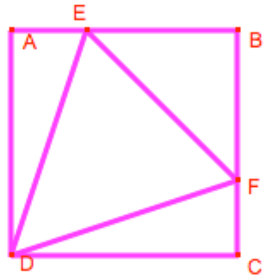
Ce nombre appartiendra à K à condition que ab soit multiple de 10 000.

Il faut donc trouver deux nombres a et b, non multiples de 10, dont le produit soit multiple de 10 000, ce qui est possible par exemple en prenant comme valeurs de a une puissance de 2 suffisamment grande et comme valeur de b une puissance de 5 suffisamment grande.

On obtient par exemple 0,625 $\times$ 0,016 = 0,01.

Remarque : Nous fournissons dans le corrigé une façon de fabriquer des exemples, ce qui ne serait pas nécessaire le jour du concours. L'exemple lui même suffit à prouver l'affirmation D.

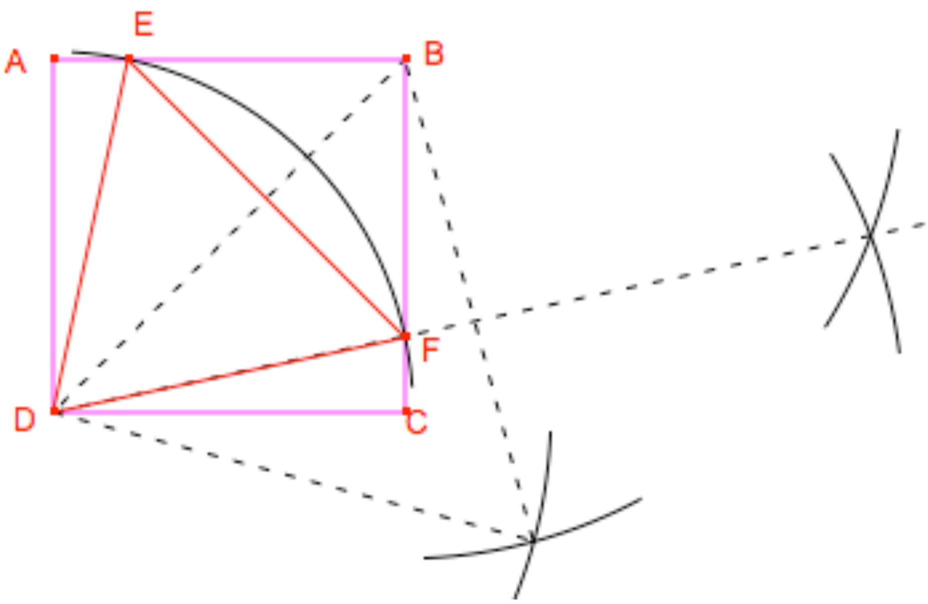
Solution du problème n°2



La disposition visée est celle ci (dessin approximatif à main levée) :

Il s'agit donc de construire les points E et F.
Il semble raisonnable de penser que E et F sont symétriques par rapports à (BD)… mais nous n'allons pas chercher à le prouver, nous cherchons une construction utilisant cette symétrie, et nous verrons bien si nous aboutissons.
Si toutes les conditions du texte et la symétrie sont réunies, on a $\widehat{BDF} = 30°$
Nous allons donc construire la figure demandée en utilisant cette mesure d'angle.
Pour construire un angle de 30°, nous allons d'abord construire un triangle équilatéral (qui n'est pas celui demandé) puis tracer une de ses bissectrices.
Quand F est placé, on construit E sur [AB] tel que DF = DE.

Remarques : il n'est jamais demandé au CRPE de trace de la recherche analogue à ce qui est fourni ci-dessus, cette trace n'est là que pour indiquer une façon possible de résoudre le problème.
En revanche, il peut arriver (ce n'était pas le cas ici) qu'il soit demandé de justifier la construction, ce que nous faisons sous la construction.
D'autres méthodes de construction sont bien entendu possibles.



On a construit un triangle équilatéral et une de ses bissectrices, donc $\widehat{BDF} = 30°$ par construction.
(BD) est un axe de symétrie du cercle de centre D passant par F et du carré ABCD.

Le point F étant sur ce cercle et sur ce carré, son symétrique par rapport à (BD) est également sur ce cercle et sur ce carré, c'est donc le point E.

Il en résulte que les angles $\widehat{BDF}$ et $\widehat{BDE}$ ont la même mesure et que $\widehat{EDF} = 60°$

Le triangle DEF est isocèle par construction et a un angle de 60°, il est donc équilatéral et répond à toutes les conditions du problème.

Solution du problème n°3

Quel que soit la valeur obtenue au premier tirage, il existe une face qui, au deuxième tirage permet d'obtenir que la somme soit 7.

La probabilité que la somme soit 7 est donc égale à $\frac{1}{6}$

Remarque : on peut aussi étudier de façon exhaustive tous les tirages possibles au moyen d'un arbre ou d'un tableau à double entrée. On trouvera alors six cas favorables : 1-6, 2-5, 3-4, 4-3, 5-2, 6-1 (1-6) signifie qu'on obtient 1 au premier tirage et 6 au second.

Parmi 36 cas possibles, ce qui conduit à une probabilité de $\frac{6}{36}$ soit $\frac{1}{6}$ comme trouvé précédemment.

Solution du problème n°4

Rappelons que l'écriture en base 4 des nombres entiers utilise seulement les chiffres 0, 1, 2 et 3.

Prenons l'exemple d'un nombre s'écrivant $\overline{abcd}$ en base 4 (le trait au dessus a simplement pour but de rappeler qu'on désigne ainsi le nombre dont les quatre chiffres sont a, b, c et d et non le produit de ces quatre nombres).

Par définition, $\overline{abcd} = a \times 4^3 + b \times 4^2 + c \times 4 + d$

On écrit parfois la même chose sous la forme

$\overline{abcd} = a \times 4^3 + b \times 4^2 + c \times 4^1 + d \times 4^0$

Cette deuxième forme a l'inconvénient d'être d'une complexité pas vraiment indispensable, mais l'avantage de mettre mieux en évidence la régularité du système.

Le principe peut aisément être étendu à des nombres de plus de quatre chiffres.

Vous trouverez une présentation plus élémentaire de la même chose et des exercices corrigés selon une méthode standard dans les documents suivants :

Ecrire des nombres dans une base autre que 10.

Divers problèmes à propos des entiers (avec corrigés), problèmes 6 et 14.

les liens sont sur cette page : http://primaths.fr/futur%20maitres/diversdocuments.html

Par définition, le nombre A s'écrit $\overline{1000000}$ en base 4

Le trait rappelle qu'il ne s'agit pas du nombre « un million » car il n'est pas écrit en base 10.

Si votre texte indique sans ambiguïté que l'écriture chiffrée doit être interprétée en base 4, il n'y a aucune raison que vous soyez pénalisé pour l'absence du trait.

Le nombre B est celui qui précède A. Comme A est le plus petit nombre de 7 chiffres en base quatre, son prédécesseur B est le plus grand nombre de 6 chiffres, il s'écrit donc $\overline{333333}$.

C est égal à $B\times 4^3$ or, en base 4, pour multiplier un entier par 4, il suffit de décaler ses chiffres d'un cran vers la gauche (en écrivant un zéro au dernier rang) comme le montre l'exemple suivant :

$\overline{abcd} = a\times 4^3 + b\times 4^2 + c\times 4^1 + d\times 4^0$ donc,

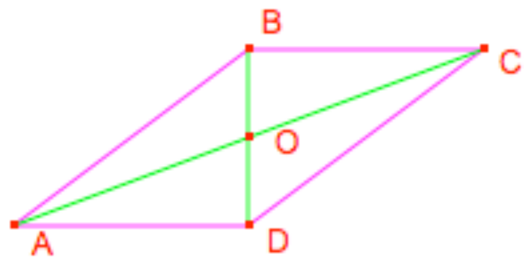
$\overline{abcd}\times 4 = a\times 4^4 + b\times 4^3 + c\times 4^2 + d\times 4^1 + 0$ donc,

$\overline{abcd}\times 4$ s'écrit $\overline{abcd0}$

Ce principe est analogue à celui de la multiplication d'un entier par 10 dans le système décimal.
Pour obtenir l'écriture en base 4 de $B\times 4^3$, on ajoutera donc 3 zéros à la droite de l'écriture de B.
Par *conséquent, C s'écrit* $\overline{333333000}$ *en base 4.*

On peut aussi calculer A B et C en base 10 puis convertir par la méthode standard… c'est plus long.

Solution du problème n°5



ABCD est un parallélogramme donc ses côtés opposés [BC] et [AD] sont parallèles.
De plus, (BD) est perpendiculaire à (BC) elle l'est donc également à (AD) ; il en résulte que le triangle ABD est rectangle en D.

Le théorème de Pythagore, appliqué au triangle ABD, rectangle en D, permet d'affirmer que
$AB^2 = AD^2 + BD^2$ d'où l'on tire $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 100 - 64 = 36$
Il en résulte que le segment [BD] mesure 6 cm.

Soit O l'intersection de [BD] et [AC].
ABCD est un parallélogramme, donc O est le milieu de [BD] et celui de [AC]

O est le milieu de [BD] donc DO = 3 cm.

Le théorème de Pythagore, appliqué au triangle AOD, rectangle en D, permet d'affirmer que
$AO^2 = AD^2 + OD^2 = 64 + 9 = 73$
Il en résulte que $AO = \sqrt{73}\ cm$.
Comme O est le milieu de [AC], $AC = 2\times AO = 2\times\sqrt{73}\ cm$.

À l'aide de la calculatrice, on constate que l'écriture décimale de ce nombre commence par 17,088007. Son arrondi au millimètre (ou au dixième de centimètre ce qui revient au même) est donc 17,1 cm ou 171 mm.

Solution du problème n°6

Le nombre A a pour reste 5 dans la division euclidienne par 7, il est donc égal à 7*a* + 5, où *a* est un entier naturel.
Les premières valeurs possibles pour A sont donc :

5 12 19 26 33 40 47 54 61

Si on divise chacun de ces nombres par 14, on obtient respectivement les restes suivants :

5 12 5 12 5 12 5 12 5

Ces premiers résultats laissent à penser que le reste de la division de A par 14 peut prendre exclusivement les valeurs 5 ou 12 (5 quand *a* est pair, 12 quand *a* est impair).

Cette recherche préalable peut être menée au brouillon, mais il n'est pas nécessaire qu'elle figure sur la copie, vous pouvez vous contenter de la mise en forme qui suit.
Par ailleurs, la recherche préalable n'a pas valeur de preuve. Elle induit l'idée que l'alternance des restes 5 et 12 va se poursuivre mais ne le prouve pas.
Si donc vous ne vous sentez pas capable de prouver correctement le caractère général de ce qu'on vient d'observer, indiquez sur votre copie la réponse qui vous semble vraie en disant très clairement que vous ne parvenez pas à le prouver. Cette réponse peut vous valoir une petite partie des points, alors que la généralisation abusive à partir des exemples ne vous vaudra rien.

Une preuve possible s'appuyant sur l'écriture algébrique :

Le nombre A a pour reste 5 dans la division euclidienne par 7, il est donc égal à $7a + 5$, où a est un entier naturel.
Nous allons distinguer deux cas possibles :

premier cas : a est pair, on posera alors $a = 2b$.
On a alors:

$$A = 2b \times 7 \quad + \quad 5$$

$$A = 14b \quad + \quad 5$$

ce qui établit que le reste de la division de A par 14 est égal à 5

deuxième cas : a est impair , on posera alors $a = 2b+1$.
On a alors:

$$A = 2(b+1) \times 7 \quad + \quad 5$$

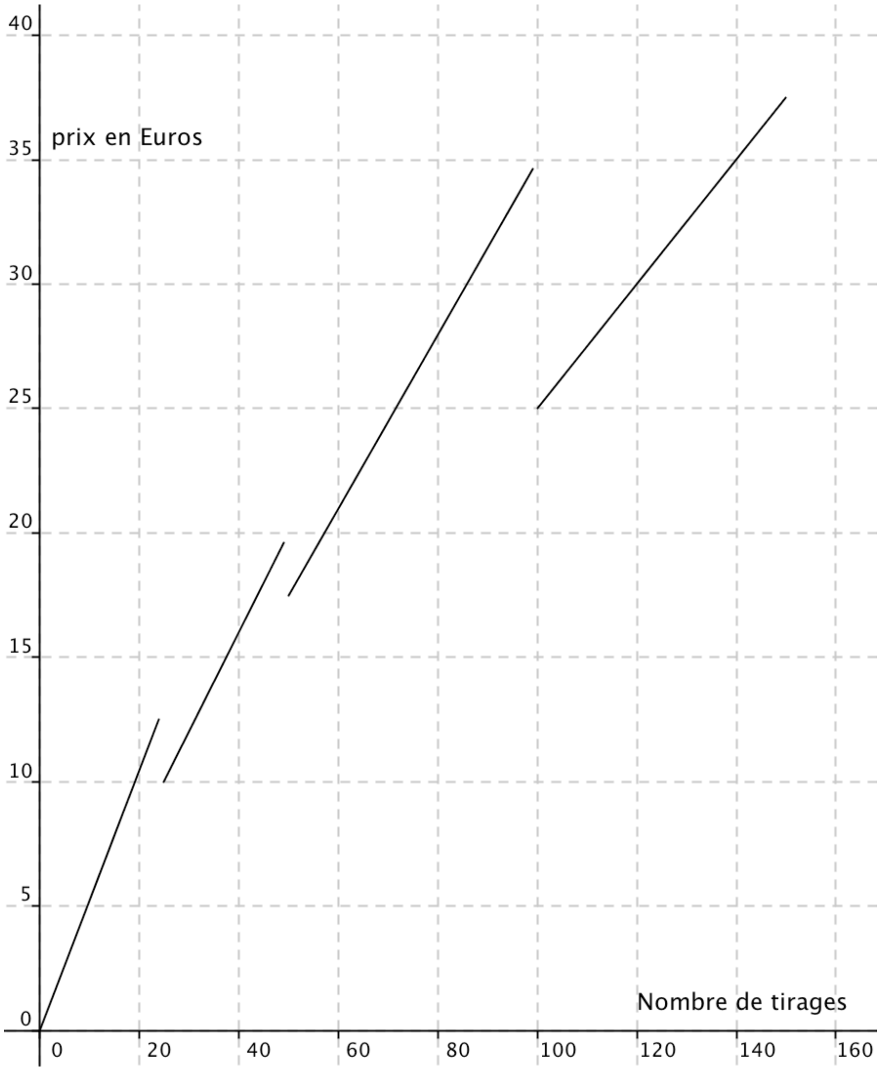
$$A = 14b \quad + \quad 7 \quad + \quad 5$$

$$A = 14b \quad + \quad 12$$

ce qui établit que le reste de la division de A par 14 est égal à 12

On remarquera que l'idée de distinguer les deux cas selon la parité de a est directement issue de l'étude préalable des exemples, qui est très utile même si elle reste confinée au brouillon.

Solution du problème n°7



Solution du problème n°8

De 0 à 50 tirages, le prix est représenté par une droite passant par l'origine, c'est donc une fonction linéaire du nombre de tirages.
Cela revient à dire que le prix s'obtient en multipliant le nombre de tirages par un nombre constant, qui est le prix d'un tirage.
Comme le prix pour 50 tirages est de 17,5 € le prix unitaire s'obtient en divisant cette valeur par 50, ce qui donne un prix unitaire de 0,35€.

La suite du graphique est une partie d'une droite, il s'agit donc d'une fonction affine, ce qui indique que le prix augmente de la même valeur à chaque fois qu'on ajoute un tirage.
En passant de 50 à 200 tirages, le prix augmente de 22,5 €.
L'augmentation pour un tirage supplémentaire est donc de 22,5 € : 150 soit 0,15 €

Le tarif peut donc se décrire ainsi :

Chaque tirage jusqu'au cinquantième est facturé 0,35 €

Chaque tirage au delà du cinquantième facturé 0,15 € (jusqu'à 200 tirages, au delà le graphique ne donne aucune indication).

Solution du problème n°9

Un photographe propose d'effectuer des tirages dans les formats suivants.

10 x 13	10 x 15	13 x 18	15 x 21	18 x 24	20 x 30
30 x 45	40 x 60	50 x 70	60 x 80.		

L'appellation 10 x 13 désigne un rectangle de largeur 10 cm et de longueur 13 cm.

Certains de ces formats sont homothétiques, ce qui signifie que l'un des deux est un agrandissement de l'autre.
Classer les formats proposés selon ce critère (tous les formats homothétiques entre eux constituent donc une catégorie).

Certains formats sont homothétiques à 2 x 3, comme par exemple 10 x 15 car la longueur et la largeur de ce format sont obtenues en multipliant par 5 celles du format 2 x 3
Il s'agit des formats 10 x 15 20 x 30 30 x 45 et 40 x 60 qui sont donc homothétiques entre eux.

Certains formats sont homothétiques à 3 x 4, comme par exemple 18 x 24 car la longueur et la largeur de ce format sont obtenues en multipliant par 6 celles du format 3 x 4
Il s'agit des formats 18 x 24 et 60 x 80 qui sont donc homothétiques entre eux.

Les formats 15 x 21 et 50 x 70 sont homothétiques à 5 x 7 et donc entre eux.

Les formats 10 x 13 et 13 x 18 n'entrent dans aucune des catégories précédentes et ne sont pas homothétiques entre eux, chacun d'eux constitue donc une catégorie à lui seul.

Solution du problème n°10

Les nombres placés dans la première ligne et la première colonne du tableau sont les moitiés des premiers entiers, on peut donc considérer qu'il s'agit de la mesure des demi-diagonales du losange.

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires, le losange est donc formé de quatre triangles rectangles ayant chacun un côté du losange comme hypoténuse, et une moitié de chaque diagonale comme côtés de l'angle droit.

Le tableau calcule la somme des carrés des demi-diagonales. En appliquant le théorème de Pythagore à l'un des triangles rectangles décrits ci-dessus, c'est aussi le carré d'un côté du losange.

Le périmètre du losange est inférieur à 12 cm si et seulement si son côté mesure moins de 3 cm, ce qui revient à dire que le carré du côté est inférieur à 9.

Chaque case à l'intérieur du tableau contenant un nombre inférieur à 9 correspond donc à un des losanges cherchés. Cependant, dans la zone entourée ci-dessous où figurent ces nombres, chacune

des deux zones grisées correspond en réalité aux mêmes losanges (un losange dont une diagonale mesure 3 cm et l'autre 2 cm ne diffère en rien d'un losange dont une diagonale mesure 2 cm et l'autre 3 cm).
Les cases laissées en blanc dans cette zone correspondent à des carrés, qui n'en sont pas moins des losanges.
Il existe donc 13 losanges différents répondant aux contraintes du problème.

	0,5	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**	**3,5**
0,5	0,5	1,25	2,5	4,25	6,5	9,25	12,5
1	1,25	2	3,25	5	7,25	10	13,25
1,5	2,5	3,25	4,5	6,25	8,5	11,25	14,5
2	4,25	5	6,25	8	10,25	13	16,25
2,5	6,5	7,25	8,5	10,25	12,5	15,25	18,5
3	9,25	10	11,25	13	15,25	18	21,25
3,5	12,5	13,25	14,5	16,25	18,5	21,25	24,5
4	16,25	17	18,25	20	22,25	25	28,25