Problème n°11

Un même article est proposé dans deux magasins, A et B.
Dans le magasin B, le prix de cet article est plus élevé de 20% que dans le magasin A.

Dans le cadre d'un plan général d'entente sur les prix (parfaitement illégal) les deux commerçants décident que cet article sera désormais vendu au même prix dans les deux magasins.

Dans le magasin A, le changement pour parvenir au prix commun est une augmentation de 8%

De quel pourcentage le prix de cet article doit-il baisser dans le magasin B pour arriver au prix commun ?

Problème n°12

Construire à la règle et au compas un octogone régulier (c'est à dire dont tous les côtés sont égaux, ainsi que tous les angles).

Problème n°13

Sans calculatrice, exprimer la durée suivante sous la forme : a heures b minutes c secondes, a étant un nombre entier, b et c des entiers inférieurs à 60.

$$0{,}005 \text{ jour} + \frac{36}{48} \text{ heure} + \frac{1100}{15} \text{ minutes} + 7800 \text{ secondes}$$

Problème n°14

$$A = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} \qquad B = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$$

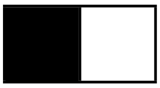
Comparer les nombres A et B (il est attendu une justification ne reposant pas sur l'usage d'une calculatrice).

Problème n°15

On considère un triangle ABC, isocèle et rectangle en A.
M est le milieu de [AC].
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{MBC}$, arrondie au dixième de degré près.

Problème n°16

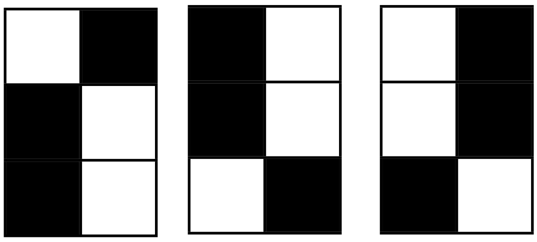
On dispose de 3 plaques rectangulaires constituées de deux parties carrées de dix centimètres de côté, l'une noire l'autre blanche.



Ces plaques sont utilisés pour recouvrir un panneau vertical rectangulaire de 20 cm de large et 30 cm de haut. On obtient ainsi des motifs constitués de six carrés, trois blancs et trois noirs.

Combien de motifs différents peut-on obtenir ?

Remarque : dans ce problème, on considère que le panneau à recouvrir ne peut pas être déplacé, ce qui fait que les trois motifs suivants sont considérés comme différents :



Problème n°17

Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

Affirmation 1

Dans une division euclidienne, le quotient est toujours inférieur au dividende.

Affirmation 2

Dans une division euclidienne, le reste est toujours inférieur au diviseur.

Affirmation 3

Dans une division euclidienne, le reste est toujours inférieur au quotient.

Problème n°18

On considère un segment [AC] de 14 cm de longueur, et un point B de [AC] tel que BC = 10 cm.
On trace le cercle de diamètre [AC] et le cercle de diamètre [BC].
P est un point du cercle de diamètre [BC] tel que PC = 8 cm.
La droite (PC) et le cercle de diamètre [AC] se coupent en R.

Calculer la longueur du segment [AR]

Problème n°19

Une cruche contient un mélange d'eau et de vin.
On ajoute au contenu de la cruche un verre de 10 cl d'eau.
On ajoute ensuite au nouveau contenu un verre de 10 cl de vin.

Les affirmations suivantes sont elles vraies ? Vous justifierez vos réponses.

Affirmation 1 :

La proportion de vin dans le mélange après les deux ajouts est la même qu'au début.

Affirmation 2 :

La proportion de vin dans le mélange après les deux ajouts est la même que si on avait ajouté le contenu des deux verres dans l'ordre inverse.

Affirmation 3 :

Pour obtenir la même proportion de vin à la fin, si on avait ajouté 20 cl d'eau, il aurait fallu ajouter 20 cl de vin.

Problème n°20

Sans calculatrice

La somme des carrés des nombres entiers de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1. Vérifier la formule donnée ci-dessus pour n = 3 puis pour n = 5

2. Calculer la somme des carrés des entiers de 1 à 50.

3. Calculer la somme des carrés des entiers de 51 à 100.

Solution du problème n°11

Appelons a le prix initial dans le magasin A, b le prix initial dans le magasin B, et x le prix commun après l'accord.

D'après les données de l'énoncé, $B = 1{,}20 \times A$ et $x = 1{,}08 \times A$

Il en résulte que $A = \dfrac{B}{1{,}20}$

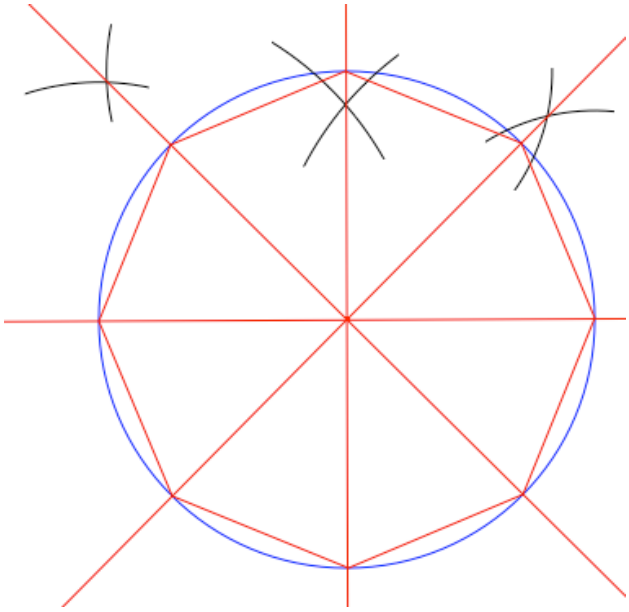
puis que $x = 1{,}08 \times \dfrac{B}{1{,}20} = \dfrac{108}{120}B = \dfrac{9 \times 12}{10 \times 12}B = \dfrac{9}{10}B$

Le prix commun est donc obtenu en diminuant de 10% le prix initial dans le magasin B.

L'un des documents référencés sur la page à laquelle mène le lien ci dessous donne quelques indications sur les problèmes traitant de pourcentage.

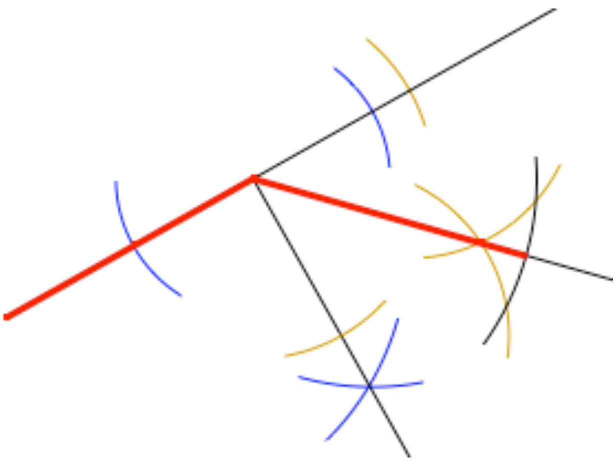
http://primaths.fr/futur%20maitres/diversdocuments.html

Solution du problème n°12



La construction d'un polygone régulier est souvent plus simple en partant du cercle dans lequel il est inscrit.

Construire les côtés de proche en proche, est en principe correct mais plutôt compliqué et risque de poser des problèmes de précision.
Nous montrons ci-dessous uniquement la construction du deuxième côté à partir du premier, choisi arbitrairement.



Solution du problème n°13

un jour, c'est 24 heures de 3600 secondes chacune, donc :

0,005 jour $= \frac{5}{1000} \times 24 \times 3600 \text{sec} = \frac{5}{10} \times 24 \times 36 \text{sec} = \frac{1}{2} \times 24 \times 36 \text{sec} = 432$ sec

Or $432 = 7 \times 60 \quad + \quad 12$

Donc 0,005 jour = **7 min 12 sec**

$\frac{36}{48}$ heure = $\frac{3}{4}$ heure = **45 min**

$\frac{1100}{15}$ minutes = $\frac{4400}{60}$ minutes c'est à dire 4400 sec car $\frac{1}{60}$ de minute est égal à une seconde.

Donc, $\frac{1100}{15}$ minutes = 1 h 800 sec or $800 = 13 \times 60 \quad + \quad 20$

donc $\frac{1100}{15}$ minutes = **1 h 13 min 20 sec**

7800 secondes = 2 h + 600 sec, soit **2h 10 min**.

La durée totale est donc égale à
7 min 12 sec + 45 minutes + 1 h 13 min 20 sec + 2h 10 min
soit 3 h 75 min 32 sec, ou encore **4 h 15 min 32 sec**, ce qui correspond à la forme demandée.

Solution du problème n°14

$$A = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} \qquad B = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}$$

Comparer les nombres A et B (il est attendu une justification ne reposant pas sur l'usage d'une calculatrice).

Une justification possible s'appuie sur la propriété suivante : si deux fractions on le même numérateur, la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

Cette propriété est vraie pour les fractions, mais également pour toutes les écritures du type $\frac{a}{b}$ dans lesquelles a et b sont des nombres positifs non nécessairement entiers. Cela se prouve aisément en réduisant les deux écritures fractionnaires au même dénominateur.

En s'appuyant sur l'inégalité $3 < 4$, on déduit donc successivement les inégalités qui suivent :

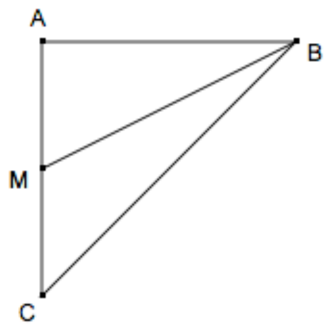
$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ $\qquad$ $1+\frac{1}{3} > 1+\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} < \frac{1}{1+\frac{1}{4}}$ $\qquad$ $4+\frac{1}{1+\frac{1}{3}} < 4+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}$

$\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} > \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$ $\qquad$ $3+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} > 3+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$

$\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}} < \frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}$ $\qquad$ et enfin $A < B$

Il est évidemment possible de préférer simplifier les écritures de A et de B puis de les comparer.
On obtient alors $A = \frac{10857}{4697}$ et $B = \frac{10858}{4697}$, ce qui confirme le raisonnement précédent.

Solution du problème n°15



Le triangle ABC étant rectangle en A et M étant sur [AC], le triangle ABM est également rectangle en A.
Par ailleurs, ABC est isocèle en A et M est le milieu de [AC], donc
$AM = \frac{AC}{2} = \frac{AB}{2}$
Dans le triangle ABM, rectangle en M, on a donc :
$\tan \widehat{ABM} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$

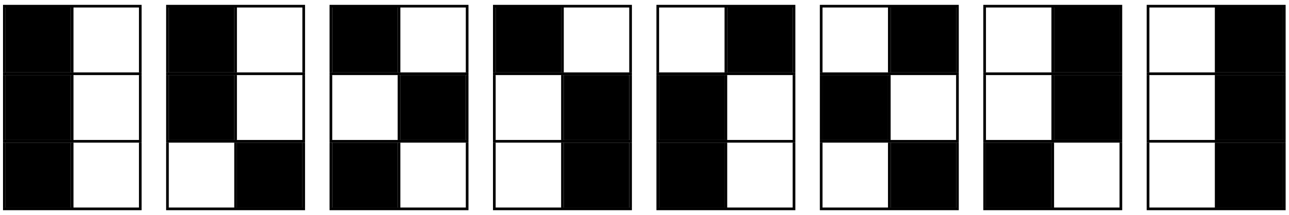
On en déduit à l'aide d'une calculatrice que $\widehat{ABM} \approx 26{,}565°$.

ABC étant isocèle rectangle, ses angles aigus mesurent 45°.
De plus $\widehat{MBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABM}$ donc $\widehat{MBC} = 45° - \widehat{ABM} \approx 18{,}435°$.

La mesure de $\widehat{MBC}$ arrondie au dixième de degré près est donc 18,4°.

Solution du problème n°16

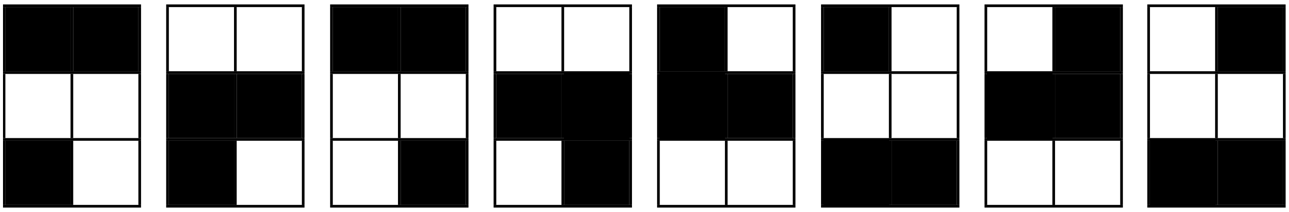
Considérons d'abord les motifs obtenus en plaçant les trois plaques dans le sens horizontal.
La plaque du haut peut présenter le carré noir à gauche ou à droite. Pour chacune de ses possibilités, le carré noir de la plaque intermédiaire peut se situer à gauche ou à droite, et il en est de même pour la plaque inférieure.
On peut donc obtenir 2 x 2 x 2, soit 8 motifs différents en plaçant les trois plaques horizontalement.



Cependant, ces motifs ne sont pas les seuls possibles car on peut également placer une plaque horizontalement (en bas ou en haut) et les deux autres verticalement.

Si les deux plaques verticales sont disposées de telle façon que les carreaux noirs et blancs soient «en damier», on obtient des motifs déjà rencontrés.
Si en revanche on dispose les plaques verticales de façon à ce que les deux carreaux noirs soient adjacents (ils forment donc un rectangle disposé horizontalement), on obtient de nouveaux motifs.

Pour obtenir un de ces nouveaux motifs, on peut placer la plaque qui demeure horizontale en bas ou en haut. Pour chacune de ces possibilités, le carré noir de cette plaque peut être à gauche ou à droite. Enfin, pour chacune de ces possibilités, la bande noire obtenue avec les deux autres plaques peut être au dessus ou au dessous de la bande blanche.
On peut donc obtenir 2 x 2 x 2, soit 8 nouveaux motifs différents en plaçant deux plaques en position verticale.



Le nombre total de motifs que l'on peut obtenir est donc 16.

Remarque : vous trouverez beaucoup d'autres problèmes de dénombrement et des indications sur la façon de les aborder sur la page «préparation à l'écrit du CRPE» de Primaths.

Solution du problème n°17

Rappelons qu'effectuer la division euclidienne de l'entier a (qu'on appelle le dividende) par l'entier b (diviseur) c'est déterminer les entiers q (quotient) et r (reste) avec $r < b$, tels que
$a = bq + r$

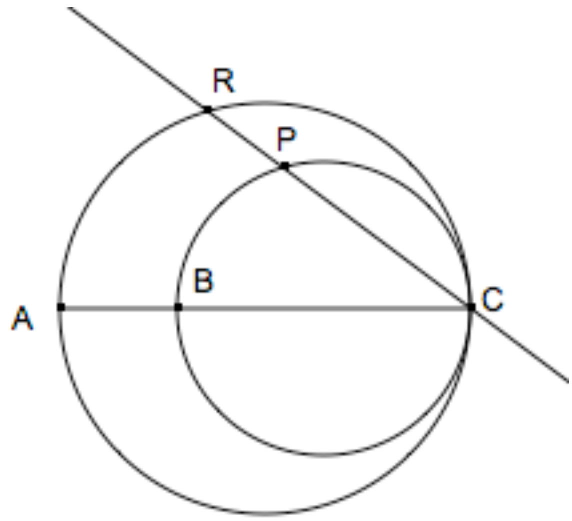
La définition même de la division euclidienne impose que le reste soit plus petit que le diviseur : l'affirmation 2 est vraie.

Si on veut partir du point de vue de l'école élémentaire, la division euclidienne traduit un problème de partage ou de groupement. Il s'agit par exemple de partager a objets entre b personnes.
Si le reste était supérieur à b, il serait encore possible de donner au moins un objet à chaque personne, le partage ne serait donc pas terminé, le reste est donc inférieur au diviseur.
La définition plus formelle donnée plus haut a d'ailleurs été inventée précisément pour être cohérente avec la division élémentaire.

La division de 35 par 1 a pour quotient 35 et pour reste 0, le quotient est égal au dividende, l'affirmation 1 est donc fausse.

La division de 25 par 20 a pour quotient 1 et pour reste 5, le reste est supérieur au quotient, l'affirmation 3 est donc fausse.

Solution du problème n°18



P est sur le cercle de diamètre [BC] donc le triangle BCP est rectangle en P.

En appliquant à ce triangle rectangle le théorème de Pythagore, on obtient :

$BC^2 = BP^2 + PC^2$

$100 = BP^2 + 64$

$BP^2 = 36$

$BP = 6$

La longueur du segment [BP] est donc de 6 cm.

R est sur le cercle de diamètre [AC] donc le triangle ACR est rectangle en R, (AR) est donc perpendiculaire à (RC)
BCP est rectangle en P, donc (BP) est perpendiculaire à (PC) qui n'est autre que (RC).

Les droites (AR) et (BP) sont toutes deux perpendiculaires à (RC), elles sont donc parallèles entre elles.

Les triangles BCP et ACR sont tels que :

- les points C, B et A sont alignés,
- les points C, P et R sont alignés,
- les droites (BP) et (AR) sont parallèles.

On peut donc leur appliquer le théorème de Thalès, d'où il résulte que :

$\frac{AC}{BC} = \frac{AR}{BP}$ soit $\frac{14}{10} = \frac{AR}{6}$ d'où l'on tire AR = 8,4 cm.

Solution du problème n°19

L'affirmation 1 est fausse.
Prenons l'exemple d'une cruche contenant initialement 10 cl de vin et 30 cl d'eau.
Le vin y représente un quart du mélange.
Après les ajouts, il y a 20 cl de vin et 40 cl d'eau, le vin représente alors un tiers du mélange, la proportion de vin a changé.

L'affirmation 2 est vraie.
La proportion de vin est le rapport du volume de vin sur le volume total de liquide.
Le changement dans l'ordre des ajouts ne modifie ni le volume du vin ni le volume total, il ne modifie donc pas leur rapport.

L'affirmation 3 est fausse.
En reprenant l'exemple utilisé pour l'affirmation 1, si on ajoutait 20 cl d'eau et 20 cl de vin, on obtiendrait 30 cl de vin et 50 cl d'eau, la proportion de vin serait de trois huitièmes et non un tiers, le résultat ne serait pas le même qu'en ajoutant 10 cl de chaque liquide.

Solution du problème n°20

1.Vérifier la formule donnée ci-dessus pour n = 3 puis pour n = 5

$$\frac{3(3+1)(2\times 3+1)}{6}=\frac{3\times 4\times 7}{6}=14 \text{ or } 1^2+2^2+3^2=1+4+9=14,$$

ce qui confirme la formule donnée pour n = 3.

$$\frac{5(5+1)(2\times 5+1)}{6}=\frac{5\times 6\times 11}{6}=55 \text{ or } 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=1+4+9+16+25=55,$$

ce qui confirme la formule donnée pour n = 5.

2.Calculer la somme des carrés des entiers de 1 à 50.
Appliquons la formule fournie, pour n = 50.

$$\frac{50(50+1)(2\times 50+1)}{6}=\frac{50\times 51\times 101}{6}=25\times 17\times 101=425\times 101=42925$$

La somme des carrés des nombres entiers de 1 à 50 est égale à 42925.

3.Calculer la somme des carrés des entiers de 51 à 100.
Pour obtenir cette somme,on peut calculer celle des carrés des entiers de 1 à 100, puis soustraire la somme des carrés des entiers de 1 à 50 précédemment calculée.

$$\frac{100(100+1)(2\times 100+1)}{6}=\frac{100\times 101\times 201}{6}=\frac{2030100}{6}=338350$$

La somme des carrés des entiers de 1 à 100 est égale à 338350.

La somme des carrés des entiers de 51 à 100 est donc égale à 338350 - 42925 soit 295425.