Problème n°21

(sans calculatrice)

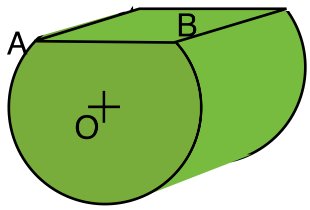
La somme des carrés des nombres entiers de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.Calculer $\frac{118\times119\times237}{6}-\frac{117\times118\times235}{6}$

2.Soit n un nombre entier positif. Est-il vrai que $n(n+1)(2n+1)$ est toujours multiple de 6 ?

Problème n°22

On considère un cylindre dont les bases ont un diamètre de 20 cm et dont la hauteur mesure 20 cm.
On coupe ce cylindre comme l'indique le schéma par un plan parallèle à son axe.
Soit O le centre de la face avant du cylindre, [AB] l'intersection de cette face et du plan de coupe. L'angle $\widehat{AOB}$ mesure 90°
Calculer le volume de ce solide.



Problème n°23

Un caissier constate qu'il n'a dans sa caisse que des billets de 20 € et des billets de 50 €.
Le nombre total de billets est de 93, la somme totale est de 2910 €.
Quel est le nombre de billets de chacune des deux valeurs ?
On proposera une solution algébrique et une solution arithmétique (c'est à dire n'utilisant pas d'équation).

Problème n°24

On considère un nombre entier A qui s'écrit avec 4 chiffres : $A=\overline{abcd}$
On obtient le nombre B en insérant deux zéros entre le chiffre des centaines et le chiffre des dizaines de A. $B=\overline{ab00cd}$
Démontrer que le nombre B-A est multiple de 99.

Problème n°25

On considère une classe de 25 élèves.
Cette classe a effectué un devoir pour lequel chaque élève à reçu une note, qui est un nombre entier compris entre 0 et 20
Proposez une répartition des notes telle que la moyenne soit égale à 15 et la médiane à 18, ou justifiez l'impossibilité d'une telle répartition.
Proposez une répartition des notes telle que la moyenne soit égale à 18 et la médiane à 15, ou justifiez l'impossibilité d'une telle répartition.

Problème n°26

Deux marcheurs se déplacent sur une même route joignant les villes A et B.
Chacun d'entre eux marche à vitesse constante.
L'un des marcheurs part de A à 12 heures et arrive à B à 17 heures.
L'autre marcheur part de B à 12 heures et arrive à B à 16 heures.

À quelle heure les deux marcheurs se croisent-ils ?

Problème n°27

On considère un carré ABCD de 8 cm de côté et le point E du segment [AD], tel que AE = 2 cm.
F est un point situé à l'intérieur du carré.

Peut-on placer F pour que les polygones ABCFE et CDEF aient la même aire ?
Justifier l'impossibilité ou indiquer où il faut placer F pour obtenir des aires égales.

Peut-on placer F pour que les polygones ABCFE et CDEF aient le même périmètre ?
Justifier l'impossibilité ou indiquer où il faut placer F pour obtenir des périmètres égaux.

Problème n°28

ABC est un triangle équilatéral.
BCD est un triangle isocèle et rectangle en C, le point D étant choisi pour que A et D ne soient pas du même côté de la droite (BC).
On trace la perpendiculaire à (AB) passant par le point B, elle coupe (AD) en E.

Démontrer que le triangle BCE est isocèle en B.

Problème n°29

Quel est le plus petit nombre entier supérieur à 100 000 ayant pour reste 30 dans la division euclidienne par 137 ?

Problème n°30

Parmi les nombres entiers de 1 à 10 000, combien y en a-t-il qui sont des multiples de 7 et se terminent par le chiffre 5 ?

Solution du problème n°21

1. On remarque que $119 = 118 + 1$ et que $237 = 2 \times 118 + 1$

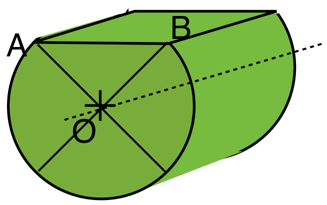
La première des deux fractions de l'expression proposée est donc égale à la somme des carrés des entiers de 1 à 118.
De même, la deuxième fraction est égale à la somme des carrés des entiers de 1 à 117.
La différence entre les deux est donc le carré du nombre 118, soit 13924.

Le calcul effectif sans référence à la formule fournie dans l'énoncé est évidemment acceptable, mais probablement plus long à effectuer sans calculatrice.

2. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est la somme des carrés des entiers de 1 à n, c'est donc un nombre entier.

Le nombre $n(n+1)(2n+1)$, qui est obtenu en multipliant cet entier par 6 est donc multiple de 6.

Solution du problème n°22



Une des façons de calculer le volume de ce solide consiste à le partager en 4 parties à l'aide du plan contenant l'axe du cylindre et le point B et du plan contenant l'axe du cylindre et le point A.
On obtient ainsi trois parties identiques, chacune ayant pour volume le quart du cylindre, et une partie qui est un prisme droit dont le triangle AOB est une base et dont la hauteur est celle du cylindre.
Si on note r le rayon du cylindre, et h sa hauteur, le volume du solide considéré est donné par :

$$V = \frac{3}{4} \times \pi \times r^2 \times h \quad + \quad \frac{r^2}{2} \times h$$

Sachant que le rayon mesure 10 cm et la hauteur 20 cm, on obtient

$$V = \frac{3}{4} \times \pi \times 100 \times 20 \quad + \quad \frac{100}{2} \times 20$$

$$V = 1500\pi \quad + \quad 1000$$

Le volume du solide, exprimé en centimètres cubes, mesure donc 1500 π + 1000, soit environ 5712 centimètres cubes.

Autres méthodes envisageables :
Calculer le volume de la partie enlevée au cylindre (différence entre le quart du cylindre et le prisme) puis la soustraire du volume du cylindre.
Appliquer à ce solide droit la formule de calcul de volume valable pour un cylindre, un prisme droit, ou tout autre solide droit : le volume est le produit de l'aire de base par la hauteur.

En cas de difficulté avec les formules de calcul de volume, un document récapitulatif à télécharger est disponible sur Primaths.
Vous pouvez l'atteindre en suivant le cheminement suivant :
Page d'accueil
Préparation à l'écrit du CRPE
Divers documents à télécharger pour préparer l'écrit du CRPE

Solution du problème n°23

Un caissier constate qu'il n'a dans sa caisse que des billets de 20 € et des billets de 50 €.
Le nombre total de billets est de 93, la somme totale est de 2910 €.
Quel est le nombre de billets de chacune des deux valeurs ?

Solution algébrique.
soit x le nombre de billets de 20 €.
Le nombre de billets de 50 € est alors égal à (93 -x)
La somme total est donc donnée par l'expression 20 x + 50 (93 -x)
Le nombre x vérifie donc l'équation suivante :

$$20x+50(93-x)=2910$$

$$20x+4650-50x=2910$$

$$1740=30x$$

$$x=\frac{1740}{30}=58$$

Il y a donc 58 billets de 20 € et, par conséquent, 93 - 58 soit 35 billets de 50 €.

Nous avons choisi d'utiliser une seule équation. Utiliser un système de deux équations, est plus classique pour ce type de problème. Vous trouverez sur la page «préparation à l'écrit du CRPE» de Primaths des conseils concernant la résolution des équations du premier degré et des systèmes de deux équations, ainsi que sur la mise en équation de problèmes.

Solution arithmétique 1.
Supposons qu'il n'y ait 93 billets de 20 €. La valeur totale serait alors de 1860 €, ce qui est inférieur de 1050 € à la valeur réelle.
Si on remplace un billet de 20 € par un billet de 50 €, la valeur totale augmente de 30 €, sans que le nombre de billet soit modifié.
Pour obtenir la valeur cherchée, il faut augmenter la valeur de 1050 €, or 1050 = 35 x 30.
On obtiendra donc la valeur voulue en remplaçant 35 billets de 20 € de l'hypothèse initiale par des billets de 50 €. Il y a donc dans la caisse 35 billets de 50 € et 58 billets de 20 €.

Solution arithmétique 2.
Procédons par essais que nous inscrivons dans un tableau, chaque ligne du représentant un essai.

nombre de billets de 20€	nombre de billets de 50€	valeur des billets de 20€	valeur des billets de 50€	valeur totale
10	83	200	4150	4350
50	43	1000	2150	3150
55	38	1100	1900	3000
60	33	1200	1650	2850
58	35	1160	1750	2910

Il y a donc dans la caisse 35 billets de 50 € et 58 billets de 20 €.
Une solution par essais successifs telle que celle-ci est correcte et admise au concours.

Solution du problème n°24

Notons x le nombre qui s'écrit $\overline{ab}$, y celui qui s'écrit $\overline{cd}$
écrivons les égalités caractéristiques des divisions euclidiennes de A par 100 et de B par 100.

$A = 100x + y \qquad B = 100 \times 100x + y$

Calculons la différence B-A en utilisant les égalités ci-dessus.

$$B - A = 100 \times 100x + y - (100x + y)$$
$$B - A = 100 \times 100x - 100x + y - y$$
$$B - A = 99 \times 100x$$

La dernière égalité montre que B-A est multiple de 99.

***Remarque** : il est également possible d'analyser A et B chiffre par chiffre en utilisant la décomposition canonique suivant le système décimal, ce qui conduit à des écritures un plus longues mais tout à fait correctes.*
On pouvait être mis sur la piste de l'utilisation d'une décomposition privilégiant les centaines par le fait qu'écrire deux zéros derrière un entier revient à le multiplier par 100.

Cette idée pouvait également être suggérée par un exemple :
si A = 2538, alors B = 250038, ce qui peu inciter à décomposer en 2500 + 38 et 250000 + 38
Si on remarque que 250000 = 100 x *2500, on voit que*

$$B - A = 100 \times 2500 + 38 - (2500 + 38)$$
$$B - A = 100 \times 2500 - 2500 + 38 - 38$$
$$B - A = 99 \times 2500$$

Si le calcul est conduit de cette façon sur l'exemple, non seulement il suggère la solution algébrique donnée au début, mais il a presque valeur de preuve puisqu'on ne se sert à aucun moment des valeurs particulières 25 et 38, ce qui rend l'exemple générique.
Ce ne serait pas le cas si on écrivait :

$$B - A = 250038 - 2538$$
$$B - A = 247500$$
$$B - A = 99 \times 2500$$

Solution du problème n°25

Considérons une répartition dont la moyenne est 15.
La somme des 25 notes obtenues est donc égales à 15 x 25 soit 375.
Si on range les notes par ordre décroissant, la médiane est la note du 13ème élève.
la médiane ne donne aucune indication sur les notes des autres élèves.
La somme des notes des 24 autres élèves (en excluant le 13ème) est égale à 375 - 18, soit 357.
Une des façons de l'obtenir est d'attribuer 20 à 12 élèves et 10 à 11 élèves et 7 à un élève.
On obtient ainsi la répartition résumée dans le tableau suivant, dont la moyenne est 15 et la médiane 18.

note	7	10	18	20
nombre d'élèves ayant cette note	1	11	1	12

Il n'est pas possible de trouver une répartition des notes dont la moyenne est 18 et la médiane 15.

Considérons une répartition dont la moyenne est 18.
La somme des 25 notes obtenues est donc égale à 18 x 25 soit 450
Si la médiane est 15, 13 élèves ont obtenu une note inférieure ou égale à 15. La somme de leurs 13 notes est donc inférieure ou égale à 195.
Il faut donc que les 12 autres élèves aient obtenu un total supérieur ou égal à 255, ce qui est impossible puisque la note maximum pour chaque élève est 20.

Solution du problème n°26

Une solution algébrique :
Prenons comme unité de longueur le km, comme unité de temps l'heure (et donc comme unité de vitesse le kilomètre par heure). Notons d la distance AB.

La vitesse d'un des marcheurs est alors de $\frac{d}{4}$, celle de l'autre marcheur de $\frac{d}{5}$

Appelons x la durée en heures entre le départ et la rencontre. Comme au moment de la rencontre les marcheurs ont parcouru à eux deux la distance AB, on a $\frac{d}{4}x+\frac{d}{5}x=d$

On en tire successivement $\frac{5d}{20}x+\frac{4d}{20}x=d$ $\qquad \frac{9d}{20}x=d$ $\qquad x=\frac{20d}{9d}=\frac{20}{9}$

La durée du trajet jusqu'à la rencontre est donc de $\frac{20}{9}h$

$\frac{20}{9}=2+\frac{2}{9}$ donc $\frac{20}{9}h = 2h+\frac{2}{9}h$ or une heure est égale à 3600 secondes donc

$\frac{2}{9}h=\frac{2}{9}\times 3600s=800s=13\min 20s$

La durée du trajet jusqu'à la rencontre est donc 2 h 13 min 20 s
L'heure de la rencontre est 14 h 13 min 20 s.

Une solution arithmétique :
Si les marcheurs continuaient à marcher à la même vitesse au delà de la ville où ils se rendent, en 20 heures, l'un des deux ferait 4 fois la distance AB, l'autre 5 fois cette distance.
En 20 heures, la distance AB serait donc parcourue 9 fois en tout.

Pour qu'elle soit parcourue un fois en tout, il faut donc 9 fois moins de temps, soit $\frac{20}{9}h$.

La conversion en heures minutes et secondes pour indiquer l'heure de la rencontre peut se faire comme dans la méthode précédente.

Remarque : *On peut trouver plus facile de donner une valeur à la distance AB.*
En procédant ainsi, on trouvera bien la même heure de rencontre (normal : les méthodes ci-dessus montrent que cette heure ne dépend pas de la distance AB).
Cependant, la méthode n'est correcte que si on y explique comment on sait que l'heure de la rencontre ne dépend pas de la distance AB.

Solution du problème n°27

L'aire totale de ABCD est de 64 cm²
L'aire du triangle CDE est de 8 x 6 : 2 soit 24 cm²
Pour que CDEF et ABCFE aient la même aire, celle-ci doit mesurer 32 cm² pour chacun d'eux (la moitié du carré). L'aire de ECF doit donc mesurer 8 cm².

Le triangle DCE étant rectangle en D, le théorème de Pythagore permet d'établir que EC = 10 cm.

Le triangle EFC a une aire de 8 cm² si et seulement si sa hauteur issue de F a une longueur h telle que 10 h : 2 = 8, soit h = 1,6 cm.

Les deux polygones ont donc la même aire si et seulement si le point F est situé sur la parallèle à (EC) située à 1,6 cm de (EC) et qui ne coupe pas le triangle DEC.

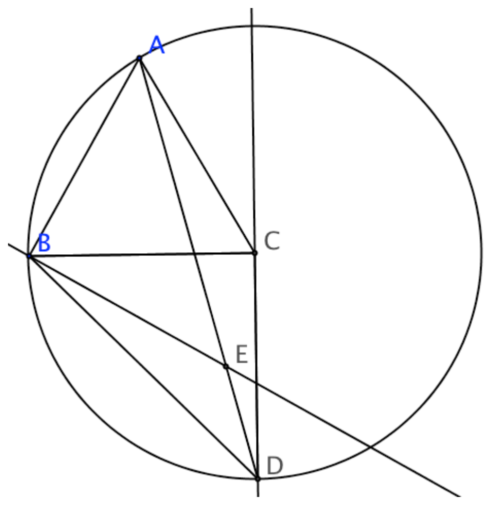
Autre présentation :
Il est clair que si on place le point F en A, les deux polygones ont la même aire, qui est celle d'un des triangles BAC et DAC.
Cette aire ne change pas si on place F sur la parallèle à (EC) passant par A. En effet, le quadrilatère DCFE peut se décomposer en deux triangles : DEC qui est fixe, et CEF dont le côté [EC] est fixe et dont la hauteur relative à [EC] ne change pas au cours du déplacement envisagé de F.
En revanche, si on place F d'un côté ou de l'autre de la parallèle à (EC) passant par A, cela modifie la hauteur relative à [EC] du triangle CEF, et donc l'aire de CDEF.

On obtient donc deux polygones de même aire si et seulement si le point F est situé sur la parallèle à (EC) passant par A.

Les deux polygones ne peuvent pas avoir le même périmètre.
En effet, le périmètre de CDEF est égal à 14 + EF + FC et celui de ABCFE est 18 + EF + FC.
Quelle que soit la position de F, le périmètre de ABCFE sera supérieur de 4 cm à celui de CDEF.

Solution du problème n°28

Une démonstration possible :



ABC est équilatéral, donc AC = BC.
BCD est isocèle en C, donc BC = CD.
AC = BC et BC = CD, donc AC = CD. il en résulte que le triangle ACD est isocèle en C.

Dans le triangle ACD, l'angle de sommet C mesure 90° + 60°, soit 150°
Comme la somme des angles d'un triangle est de 180° et que les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, les angles de sommets A et D de ce triangle mesurent chacun (180° - 150°):2 soit 15°.

Dans le triangle ABE, l'angle de sommet A mesure donc 60° - 15°, soit 45°
Le triangle ABE est rectangle en B et a un angle de 45°, il est donc isocèle rectangle en B, par conséquent BE = AB

BE = AB et AB = BC, donc BE = BC, il en résulte que le triangle BCE est isocèle en B.

Solution du problème n°29

Méthode 1
En posant la division euclidienne de 100 000 par 137, on trouve un quotient de 729 et un reste de 127, ce qui signifie que 100 000 = 729 x 137 + 126

Un nombre qui a pour reste 30 dans la division euclidienne par 137 est de la forme q x 137 + 30.
Parmi les nombres de cette forme :
729 x 137 + 30 est inférieur à 729 x 137 + 126, c'est à dire à 100 000.
730 x 137 + 30 est supérieur à 730 x 137, donc à 729 x 137 + 126, c'est à dire à 100 000.

Le plus petit nombre supérieur à 100 000 et ayant pour reste 30 dans la division par 137 est donc égal à 730 x 137 + 30, soit 100 040.

Méthode 2
On écrit une suite croissante de nombres ayant tous pour reste 30 dans la division par 137 (en ajoutant à chaque étape un multiple de 137).

Par exemple, en partant de 500 x 137 + 30 = 68 530 , les nombres qui suivent ont tous le reste voulu.
68 530 + 13 700 = 82230
82 230 + 13 700 = 95 930
95 930 + 1 370 = 97300
97300 + 1 370 = 98670
98670 + 1 370 = 100 040

Le nombre 100 040 est supérieur à 100 000 et a pour reste 30 dans la division par 137.
Le nombre précédent ayant le même reste dans cette division est obtenu en soustrayant 137 à 100 040, ce qui donne un nombre inférieur à 100 000.
Le nombre cherché est donc 100 040.

Solution du problème n°30

Tous les nombres entiers se terminant par un 5 sont multiples de 5.
En conséquence, les nombres étudiés, qui sont multiples de 5 et de 7, sont multiples de 35.

En revanche, tous les multiples de 35 ne font pas partie des nombres étudiés, en effet, un multiple de 35 est un nombre de la forme 35 n, n étant un entier.
On doit distinguer deux cas : si n est pair, le nombre se termine par 0, si n est impair le nombre se termine par 5.

en divisant 10 000 par 35, on montre que 10 000 = 285 x 35 + 25
le plus grand des nombres étudiés est donc 285 x 35.

Les multiples de 7 se terminant par un 5 compris entre 1 et 10 000 vont donc de 1x35 à 285x35. Il y en a autant que de nombres impairs de 1 à 285.

étant donné l'alternance des nombres pairs et impairs, parmi les 284 entiers de 1 à 284, 142 sont impairs, il y a donc 143 nombres impairs de 1 à 285, et également 143 multiples de 7 se terminant par un 5 entre 1 et 10 000.

Autre méthode.

Le premier nombre qui répond aux critères est 35.

Pour trouver le suivant, il faut ajouter un multiple de 10 (pour conserver le chiffre des unités) qui soit également multiple de 7 (pour que la somme soit multiple de 7). Il faut donc ajouter un multiple de 70.

Les nombres qui conviennent sont donc de la forme 35 + 70 n, n étant un entier.

En divisant 10 000 par 70, on montre que 10 000 = 142 x 70 + 60.
Le plus grand nombre répondant aux critère est donc 142 x 70 + 35.

Les nombres répondant aux critères sont les entiers de la forme 35 + 70 n, n étant un entier pouvant valoir de 0 à 142, il y a donc 143 nombres qui répondent aux critères.