Problème n°31

Construire à la règle non graduée et au compas un pentagone non croisé ABCDE respectant simultanément toutes les conditions suivantes : $AB = \frac{2}{3} BC$ $\qquad \widehat{ABC} = 120°$

$\widehat{BCD} = 90°$ $\qquad \widehat{AED} = 90°$ $\qquad$ AD = BD $\qquad$ BE = CE

Problème n°32

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher, trois rouges et deux bleues.
On tire une boule dans cette urne puis on la remet dans l'urne et on tire à nouveau une boule.
Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient de la même couleur ?

Problème n°33

On considère un triangle ABC, recangle en C, tel que AC = 20 cm et BC = 10 cm.
On place un point P sur [AC], de tel façon que AP > 10 cm.

Le triangle ABC étant découpé dans une feuille de papier, on le plie suivant la perpendiculaire à (AC) passant par P.

On note x la mesure AP en centimètres, montrer que l'aire de la figure obtenue après pliage est égale à $(x-10)^2 + \frac{400-x^2}{4}$

Problème n°34

A, B et C sont trois nombres entiers.
A s'écrit avec 2 chiffres, B avec 4 chiffres, et C avec 3 chiffres.
Avec combien de chiffres s'écrit le nombre A (B-C).

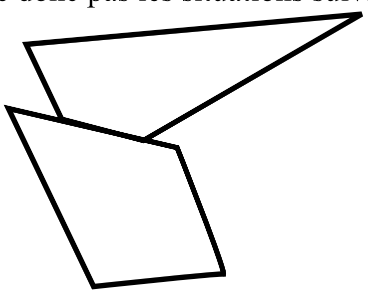
Problème n°35

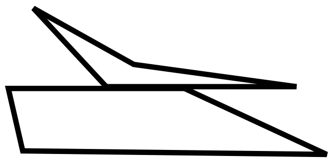
Dans l'extrait de feuille de calcul ci-dessous, les valeurs en gras sont entrées explicitement par l'utilisateur, les valeurs en italiques sont calculées.
Indiquer une formule qui peut avoir été entrée dans la cellule B8 puis recopiée en tirant vers la droite et vers le bas pour obtenir ce résultat.

	A	B	C	D	E	F
5						
6						
7	**valeur initiale**					**Valeur finale**
8	**5**	*5,6*	*6,2*	*6,8*	*7,4*	**8**
9	**10**	*32,2*	*54,4*	*76,6*	*98,8*	**121**
10	**4**	*4,2*	*4,4*	*4,6*	*4,8*	**5**
11						

Problème n°36

On considère deux quadrilatères non croisés.
Ces quadrilatères sont choisis de telle façon que les huit droites portant les côtés sont distinctes, on ne rencontre donc pas les situations suivantes :





Quel est le nombre maximum d'intersections que peuvent avoir ces deux quadrilatères ?

Problème n°37

Ranger par ordre croissant, sans utiliser de calculatrice, les fractions suivantes :

$A = \frac{381}{384}$ $\quad B = \frac{135}{136}$ $\quad C = \frac{1250}{1260}$ $\quad D = \frac{728}{735}$ $\quad E = \frac{257}{259}$

Problème n°38

Chacune des affirmations qui suit est-elle vraie ou fausse ? Vous justifierez votre réponse.

Affirmation A

On peut construire un quadrilatère dont les côtés mesurent 3 cm, 5 cm, 6 cm, et 15 cm.

Affirmation B

On peut construire un quadrilatère dont l'aire mesure 1 cm^2 et dont le périmètre est supérieur à 1 m.

Affirmation C

On peut construire un quadrilatère dont l'aire mesure 1 m^2 et dont le périmètre est inférieur à 40 cm.

Problème n°39

On considère un triangle OAB tel que OA = 5 cm, OB = 6 cm, et AB = 4 cm.
Soit C le symétrique de O par rapport à A.
Soit D le symétrique de O par rapport à B.
Les droites (BC) et (AD) se coupent en S.
La parallèle à (OA) passant par S coupe (OB) en P.
Calculer BP.

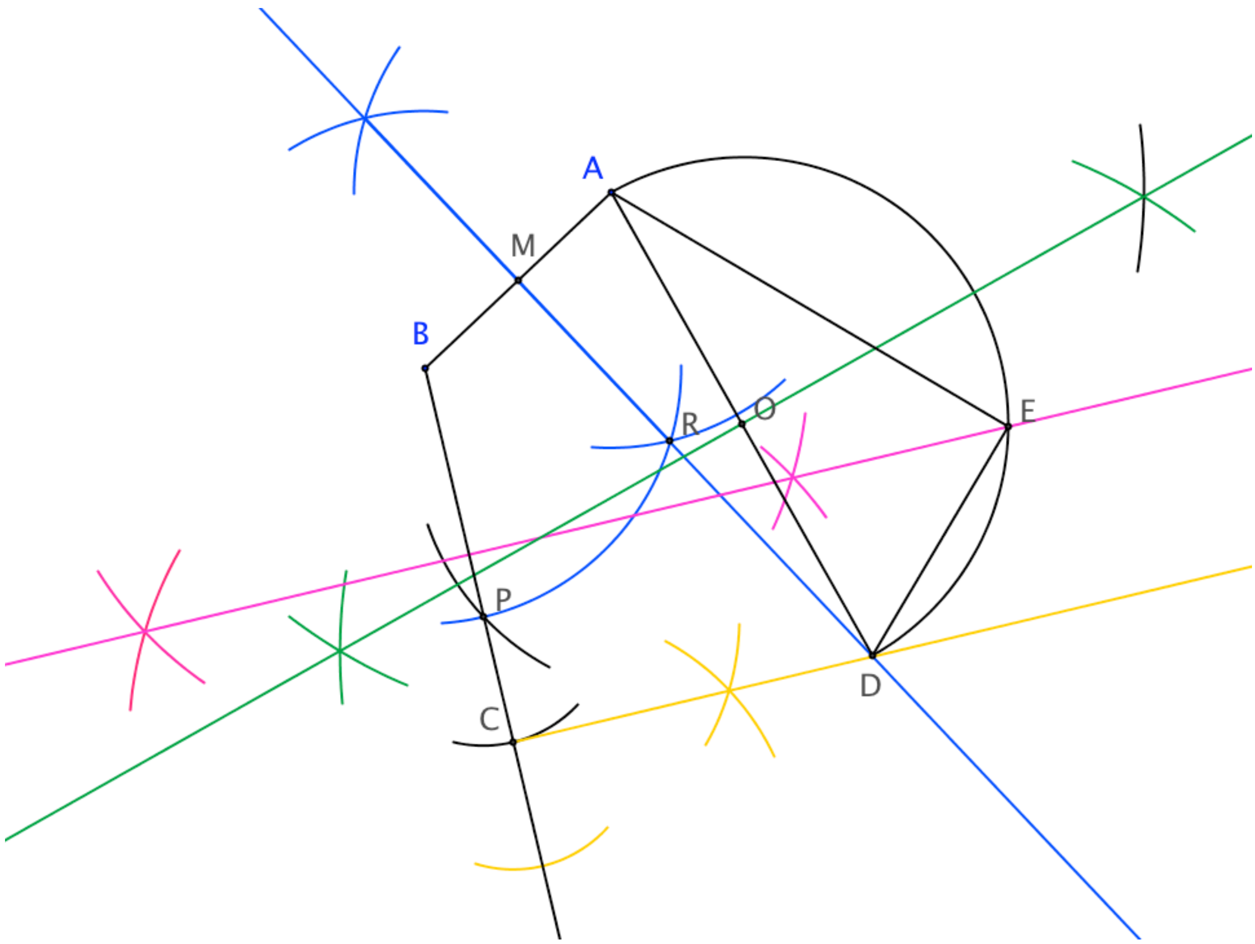
Problème n°40

On dispose d'un pavé droit dont les dimensions sont 4 cm, 6 cm et 8 cm.

On coupe se pavé droit par un plan parallèle à une de ses faces et passant par le milieu d'une arête, de façon à obtenir deux pavés droits identiques.
On assemble ensuite ces deux pavés par une de leurs faces de façon à obtenir un nouveau pavé, différent du pavé d'origine.

Quelle est l'aire totale des faces du pavé obtenu ? S'il y a plusieurs possibilités, on les donnera toutes.

Solution du problème n°31



La méthode de construction n'est évidemment pas unique.

Voici les principales idées que nous avons utilisées dans cette construction (elles sont données à titre indicatif, aucune justification n'était demandée).

•Il est plus facile de construire 3/2 d'une longueur donnée que 2/3… on commence donc par tracer [AB].
•Pour tracer l'angle de 120°, on utilise deux triangles équilatéraux : ABR et BRP.
•Le point D est à égale distance de A et de B, donc il est sur la médiatrice de [AB]
•Le triangle ADE est rectangle, donc E est sur le cercle de diamètre [AD]

Remarque : E', l'autre intersection de la médiatrice de [BC] et du cercle de diamètre [AD] ne convient pas bien que le pentagone ABCDE' soit non croisé. En effet, quand on parle des angles d'un polygones il s'agit des angles intérieurs, l'angle de sommet E' mesurerait 270° et non 90°.

Solution du problème n°32

Le tableau ci-dessous s'interprète ainsi :
Les intitulés R1, R2… da ligne de titres correspondent à la boule tirée en premier.
Les intitulés R1, R2, de la colonne de titre correspondent à la boule tirée en second.

Chaque case intérieure du tableau correspond ainsi à une des issues possibles.
Les cases qui correspondent à une issue pour laquelle les deux boules sont de la même couleur ont été grisées. On constate qu'il y a 13 issues favorables sur 25 possibles, la probabilité cherchée est donc de 13/25, ou 52%.

	R1	R2	R3	B1	B2
R1					
R2					
R3					
B1					
B2					

Remarque :
L'usage d'un tableau est peu fréquent dans les problèmes de probabilités parce qu'il ne peut pas se généraliser à des situations comportant plus de deux tirages successifs.
Cependant, quand il n'y a que deux tirages, le tableau est souvent plus facile à dresser qu'un arbre.

Si le tirage avait été sans remise, le même tableau pouvait tout de même être utilisé, à condition de mettre en évidence que les cases R1-R1, R2-R2… ne correspondent à aucun évènement possible et doivent donc être neutralisées. Il y aurait alors 8 issues favorables sur 20 issues possibles, soit une probabilité de 8/20 ou 40%.

Solution du problème n°33

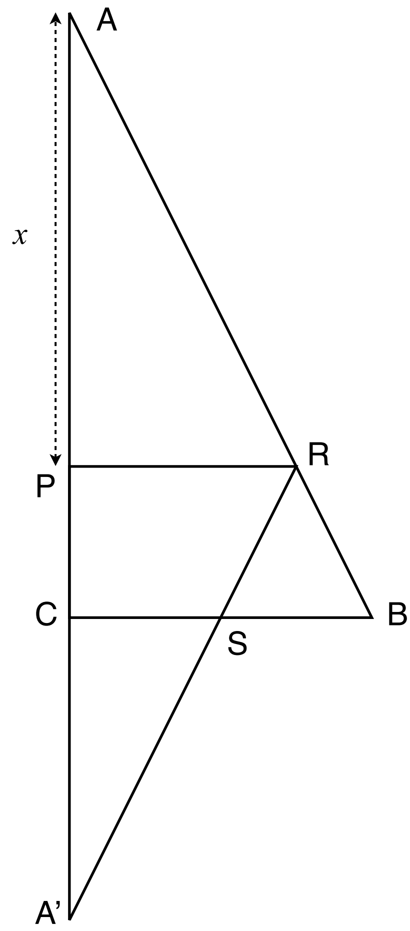
Il s'agit d'exprimer en fonction de x l'aire du polygone PRBSA'.
Cette aire peut se calculer de plusieurs façons.
On peut par exemple soustraire soustraire l'aire du trapèze PRSC de celle du triangle ABC (qui est égale à la somme des aires de PRBC et PRA').
Cependant, l'expression proposée étant une somme de deux termes, il semble plus prometteur de décomposer PRBSA' en deux parties et de calculer la somme des aires de ces deux parties.
Nous allons calculer l'aire de PRBC et celle de CSA'.

Dans le triangle ABC, R est sur (AB), P est sur (AC) et (PR)//(BC). On peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles ABC et ARP, ce qui permet d'affirmer que :

$\frac{PR}{CB} = \frac{AP}{AC}$ $\qquad \frac{PR}{10} = \frac{x}{20}$ $\qquad PR = \frac{x}{2}$

L'aire du trapèze PRBC est donc égale à :

$$\frac{(PR+BC)PC}{2}=\frac{\left(\frac{x}{2}+10\right)(20-x)}{2}=\frac{(x+20)(20-x)}{4}=\frac{400-x^2}{4}$$



Pour calculer l'aire de CSA', on évalue d'abord CA'
CA'= PA + PA' - AC = 2x - 20

On calcule ensuite CS en appliquant le théorème de Thalès aux triangles PRA' et CSA'.

$$\frac{CS}{PR}=\frac{A'C}{A'P} \qquad \frac{CS}{\frac{x}{2}}=\frac{2x-20}{x} \qquad CS=\frac{2x-20}{x}\times\frac{x}{2}=x-10$$

On en déduit que l'aire de CSA' est égale à :

$$\frac{CS\times CA'}{2}=\frac{(x-10)(2x-20)}{2}=(x-10)^2$$

l'aire de PRBSA', somme des aires de PRBC et CSA' est donc bien égale à

$$(x-10)^2+\frac{400-x^2}{4}$$

Remarques *: si on a utilisé une autre façon de calculer l'aire, on peut obtenir une expression d'une forme très différente de celle demandée. Une phase de calcul algébrique est alors nécessaire pour vérifier si les deux expressions sont égales. Une des façons possibles de procéder (pas nécessairement la plus rapide) consiste à développer les deux expressions.*
L'usage du théorème de Thalès n'est pas indispensable. Une autre méthode consiste à remarquer que les angles de sommet A ou A' dans les différents triangles rectangles sont tous égaux, ils ont donc tous la même tangente, qui vaut 1/2 dans le triangle ABC et donc aussi dans APR et A'PR.

Solution du problème n°34

A, B et C sont trois nombres entiers.
A s'écrit avec 2 chiffres, B avec 4 chiffres, et C avec 3 chiffres.
Avec combien de chiffres s'écrit le nombre A (B-C).

La plus petite valeur possible de A (B-C) est atteinte en donnant à chacun des facteurs A et (B-C) leur plus petite valeur.
La plus petite valeur possible de A est 10
La plus petite valeur possible de (B-C) est 1000 - 999, soit 1.
La plus petite valeur possible de A (B-C) est donc 10.

La plus grande valeur possible de A (B-C) est atteinte en donnant à chacun des facteurs A et (B-C) leur plus grande valeur.
La plus grande valeur possible de A est 99
La plus grande valeur possible de (B-C) est 9999 - 100, soit 9899.
La plus grande valeur possible de A (B-C) est donc 99 x 9899 = 980 001.

A (B-C) peut donc prendre allant de 10 à 980 001.
A ce stade, il semble probable que A(B-C) puisse s'écrire avec 2, 3, 4, 5 ou 6 chiffres, mais ce n'est pas réellement prouvé.
Certaines valeurs intermédiaires ne peuvent pas être atteintes (par exemple 101). Il faut donc s'assurer qu'il existe au moins une valeur atteignable qui ait trois chiffres, une qui ait quatre chiffres, et une qui en ait cinq.
Si A = 10, B = 1009 et C = 999, A (B-C) vaut 100, qui a trois chiffres.
Si A = 10, B = 1099 et C = 999, A (B-C) vaut 1 000, qui a quatre chiffres.
Si A = 10, B = 1999 et C = 999, A (B-C) vaut 10 000, qui a cinq chiffres.

Le produit A(B-C) s'écrit donc avec 2, 3, 4, 5 ou 6 chiffres selon les valeurs données à A, B et C.

Solution du problème n°35

Une des solutions consiste à écrire dans la cellule B8 la formule

=A8+($F8-$A8)/5

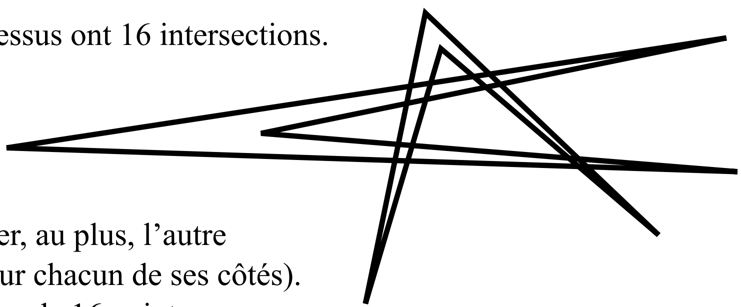
Bien entendu, d'autres solutions sont possibles.
Nous ne saurions trop conseiller de tester votre proposition à l'aide d'un tableur… c'est la seule façon d'être absolument certain du résultat.

Concernant l'utilisation du signe $, qui impose une interprétation absolue du numéro de la ligne ou de la lettre désignant la colonne, si vous avez une hésitation, nous vous suggérons la méthode suivante :

•Ecrivez la formule que vous avez trouvée dans la case initiale, sans tenir compte des signes $.
•Ecrivez dans une autre cellule de la zone de recopie (par exemple en C10 ou en E9) la formule que vous y placeriez si vous décidiez d'écrire chaque formule manuellement, sans recourir à la recopie en tirant.
•Comparez alors vos deux formules si «A8» écrit dans la formule de la cellule B8 est devenu «B8» dans la cellule C10, c'est que la colonne de la cellule de référence doit changer, il ne faut donc pas mettre de «$» devant le A. En revanche, le 8 désignant la ligne n'a pas changé, il faut donc écrire «$8» pour obtenir le même effet lors de la copie en tirant.

Solution du problème n°36

Les deux quadrilatères de la figure ci-dessus ont 16 intersections.



Deux segments n'appartenant pas à la même droite ont au maximum un point commun, chaque côté du premier quadrilatère ne peut donc couper, au plus, l'autre quadrilatère qu'en 4 points (une fois pour chacun de ses côtés).
Il en résulte qu'il ne peut pas y avoir plus de 16 points d'intersection entre les deux quadrilatères.

L'exemple montre qu'il peut y avoir 16 intersections, le raisonnement qu'il ne peut pas y en avoir plus de 16. Le maximum est donc 16.

Ce problème n'est pas vraiment standard, aucune inquiétude à avoir si vous ne l'avez pas résolu. En revanche, si dans vos essais vous n'avez à aucun moment envisagé qu'un quadrilatère non croisé puisse être concave, il y a probablement des leçons à tirer.

Solution du problème n°37

On remarque que toutes les fractions proposées sont inférieures à un, mais proches de 1, d'où l'idée de les écrire sous la forme 1-x et d'utiliser la comparaison des valeurs de x.

$$A = \frac{381}{384} = \frac{3\times127}{3\times128} = \frac{127}{128} = 1 - \frac{1}{128}$$

$$B = \frac{135}{136} = 1 - \frac{1}{136}$$

$$C = \frac{1250}{1260} = \frac{125}{126} = 1 - \frac{1}{126}$$

$$D = \frac{728}{735} = \frac{7\times104}{7\times105} = \frac{104}{105} = 1 - \frac{1}{105}$$

$$E = \frac{257}{259} = 1 - \frac{2}{259}$$

105 < 126 < 128 < 136, il en résulte que $\frac{1}{105} > \frac{1}{126} > \frac{1}{128} > \frac{1}{136}$ et que D<C<A<B

Par ailleurs, $\frac{1}{128} = \frac{2}{256}$ et $\frac{1}{136} = \frac{2}{272}$

$256 < 259 < 272$ donc $\frac{2}{256} > \frac{2}{259} > \frac{2}{272}$ et A < E < B

Le rangement des cinq fractions proposées est donc le suivant : D < C < A < E <B

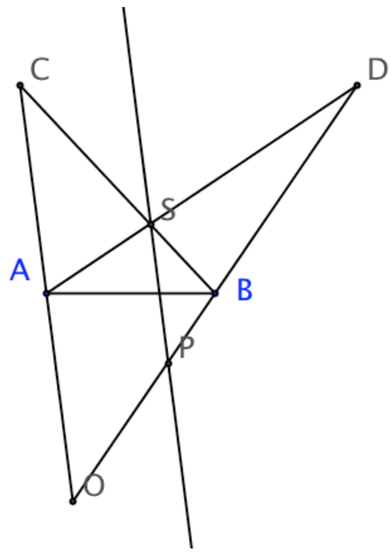
Solution du problème n°38

L'affirmation A est fausse.
Supposons qu'il existe un tel quadrilatère, nommons le ABCD, [AB] étant le côté de 15 cm.
On a alors BC + CD + DA = 6 cm + 5 cm + 3 cm = 14 cm ce qui est impossible car le plus court chemin de A à B est la longueur du segment [AB]

L'affirmation B est vraie.
un rectangle de 100 cm de long et 0,01 cm de large est un exemple d'un tel quadrilatère

L'affirmation C est fausse.
Considérons un carré de 1m de côté et son centre que l'on nomme A.
Cherchons à construire un quadrilatère ABCD de moins de 40 cm de périmètre.
Le périmètre de ABCD étant inférieur à 40 cm, chacun des côtés [AB] et [AD] mesure moins de 40 cm, il en résulte que les points B et D sont à l'intérieur du carré de 1 m de côté.
La diagonale [AC] mesure également moins de 40 cm car $AC \leq AB + BC < 40$ cm.
Le point C est donc à l'intérieur du carré de 1 m de côté.
Puisque le quadrilatère ABCD est entièrement à l'intérieur du carré de 1 m de côté, son aire est inférieure à celle de ce carré, elle ne peut pas mesurer 1 m^2.

Solution du problème n°39



D est le symétrique de O par rapport à B donc B est le milieu de [OD].
C est le symétrique de O par rapport à A donc A est le milieu de [OC].

A et B sont les milieux respectifs de [OC] et [OD], donc [DA] et [CB] sont deux médianes du triangle OCD. Il en résulte que S est le centre de gravité de ce triangle, et que $\frac{DS}{DA} = \frac{2}{3}$

Dans le triangle DAO, le point S est sur (DA), le point P est sur (DO) et (SP) est parallèle à (AO). Le théorème de Thalès permet alors d'affirmer que $\frac{DP}{DO} = \frac{DS}{DA}$.

On en déduit que $\frac{DP}{DO} = \frac{2}{3}$.

D est le symétrique de O par rapport à B donc DO = 2 BO = 12 cm.
Par conséquent, DP = 8 cm.
BP = DP - DB = 2 cm.

Solution du problème n°40

Le découpage et l'assemblage indiqués permettent d'obtenir un pavé dont l'une des dimensions a doublé, une a été diminuée de moitié, et l'autre est inchangée (par rapport au pavé initial).
Si on nomme a, b et c les dimensions d'un pavé, l'aire totale de ses faces est 2ab + 2bc + 2ca.
Le tableau si dessous indique toutes les possibilités (on choisit l'arête doublée qui peut être celle de 8 cm, celle de 6 cm ou celle de 4 cm, puis, pour chacun de ces choix, celle qui est diminuée)

arête doublée	arête diminuée	arête conservée	dimensions obtenues			aire totale des faces
8	6	4	16	3	4	248
8	4	6	16	2	6	280
6	8	4	12	4	4	224
6	4	8	12	2	8	272
4	8	6	8	4	6	208
4	6	8	8	3	8	224