Problème n°41

On considère 8 nombres entiers consécutifs dont la somme est divisible par 9.
Quel est le reste dans la division par 9 de la somme des 10 nombres constitués par les 8 nombres en question, auxquels on ajoute leur prédécesseur et leur successeur ?

Problème n°42

On considère un pavé droit dont les dimensions sont 4 cm, 5 cm et 6 cm.
On taille dans ce pavé droit une pyramide dont la base est une des faces de 5 cm sur 6 cm du pavé, et dont le sommet principal est situé au milieu d'une arête de 6 cm du pavé.
Dessiner un patron de cette pyramide.

Problème n°43

Dans ce problème, on appelle mot une suite de trois lettres parmi lesquelles il y a une ou deux voyelles. La lettre « y » est considérée comme une voyelle.
Combien de mots différents peut-on former ?

Problème n°44

Un train A est composé d'une locomotive longue de 15 m et de wagons longs chacun de 12 m.
Un train B est composé d'une locomotive longue de 17 m et de wagons longs chacun de 14 m.
Un train C est composé d'une locomotive longue de 18 m et de wagons longs chacun de 14 m.

Est-il possible que les trains A et B aient exactement la même longueur ?
Si oui, quelle est la plus petite longueur commune qui peut être réalisée ?

Est-il possible que les trains A et C aient exactement la même longueur ?
Si oui, quelle est la plus petite longueur commune qui peut être réalisée ?

Problème n°45

Sur une planisphère, les grandes villes sont représentées par des disques.
L'aire du disque représentant une ville est proportionnelle à la population de cette ville.
Une ville de deux millions d'habitants est représentée par un disque de 5 mm de rayon.
Quelle est la population d'une ville représentée par un disque de 6 mm de rayon ?

Problème n°46

Dessinez un quadrilatère quelconque puis construisez à la règle non graduée et au compas un triangle dont l'aire est égale à celle du quadrilatère.

Problème n°47

Un véhicule fort usagé roule pendant 10 minutes à la vitesse constante de 60 km/h, puis sa vitesse diminue soudainement de moitié. 10 minutes plus tard, la vitesse diminue à nouveau de moitié, et ainsi de suite toutes les 10 minutes.

Combien de temps faut-il à ce véhicule pour parcourir 19 km ?

Problème n°48

Est-il possible qu'en doublant un nombre de trois chiffres on obtienne le nombre écrit avec les mêmes chiffres dans l'ordre inverse ?
Vous indiquerez tous les nombres de trois chiffres ayant cette propriété ou justifierez l'impossibilité.

Problème n°49

Enoncer un critère permettant de reconnaître si un nombre est pair d'après son écriture en base 5.
Vous démonterez ce critère dans le cas d'un nombre s'écrivant avec quatre chiffres en base 5.

Problème n°50

A,B, C et D sont des points alignés dans cet ordre, tels que [AD] et [BC] ont le même milieu O.
Une demi-droite d'origine O coupe le cercle de diamètre [AD] en E, elle coupe le cercle de diamètre [BC] en F.
Démontrer que (AE) et (FC) sont perpendiculaires.

Solution du problème n°41

Soit n le premier des 8 nombres.
La somme des 8 nombres est alors
$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 + n + 5 + n + 6 + n + 7$
$= 8n + 28 = 9n + 27 - (n-1)$
$= 9(n+3) - (n-1)$

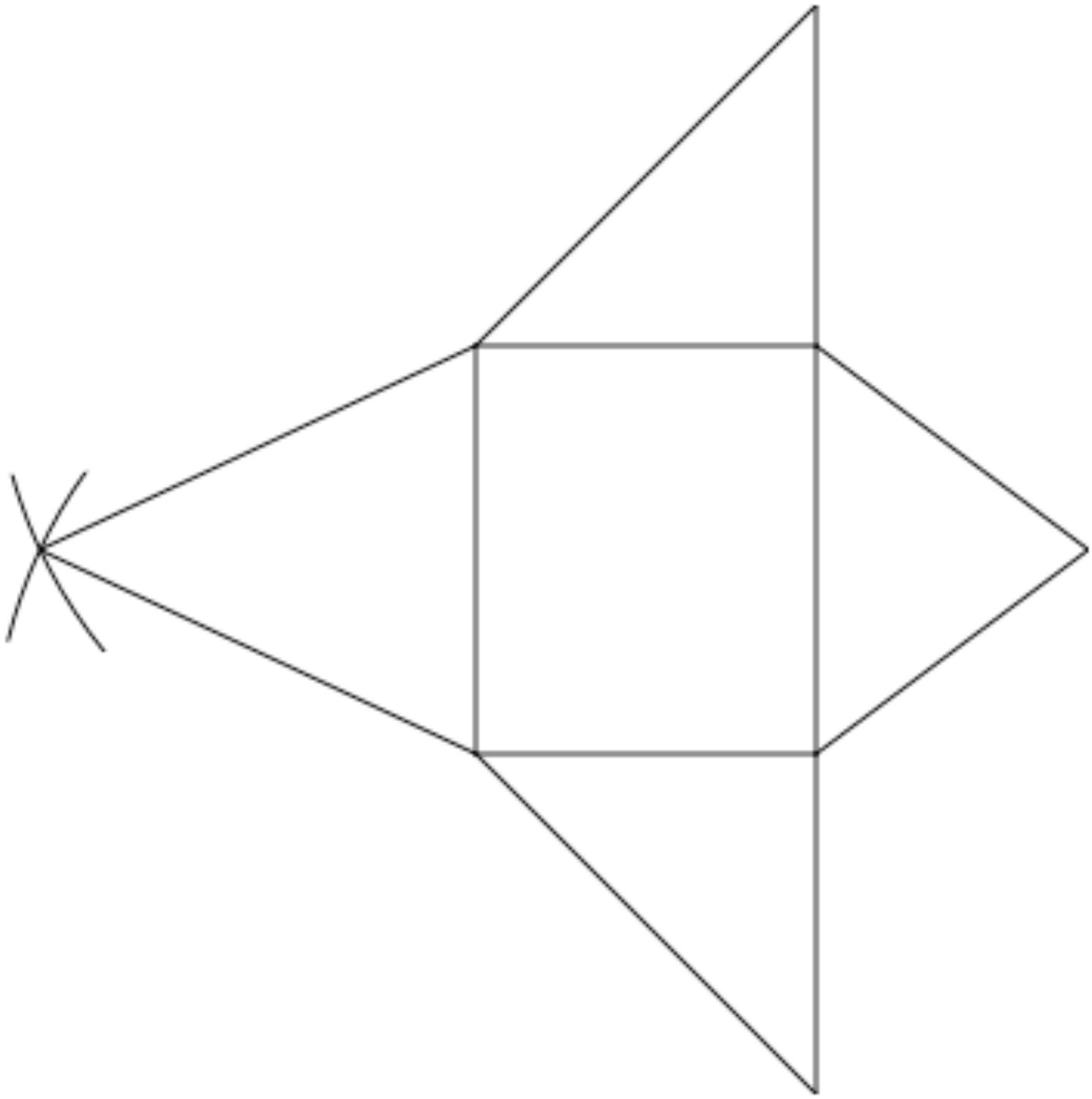
On en déduit que n-1 est un multiple de 9, c'est donc également le cas de n+8
Par conséquent, en ajoutant n-1 et n+8 à la somme précédente, qui est multiple de 9, on obtient une somme qui est également multiple de 9, le reste cherché est donc égal à 0.

Remarque : comme pour beaucoup de problèmes de ce style, la mise en forme algébrique ci-dessus est grandement facilitée si on connait à l'avance le résultat à démontrer.
On ne conseillera jamais trop de calculer effectivement des sommes de 8 entiers consécutifs pour se faire une idée du phénomène avant de se lancer dans l'algèbre.

Valeur de n	*somme de 8 entiers consécutifs dont le premier est n*	*Valeur de n*	*somme de 8 entiers consécutifs dont le premier est n*
1	36	11	116
2	44	12	124
3	52	13	132
4	60	14	140
5	68	15	148
6	76	16	156
7	84	17	164
8	92	18	172
9	100	19	180
10	108	20	188

Les cas où la somme de 8 nombres consécutifs est multiple de 9 ont été repérés…on peut alors constater que le précédent et le suivant sont des multiples de 9… reste à chercher à le prouver.
Le tableur est un bon outil pour ce genre d'exploration… mais pas le jour de l'épreuve.

Solution du problème n°42



Solution du problème n°43

L'alphabet français comporte 26 lettres, parmi lesquelles 6 voyelles (a, e, i, o, u, y) et 20 consonnes. Dénombrons séparément les mots à une voyelle et les mots à deux voyelles.

Mots à une voyelle : Si la voyelle est placée en première position, il y a 6 façons de la choisir, puis 20 façons de choisir la consonne placée en deuxième position et 20 façons de choisir la dernière consonne.
Il y a donc 6 x 20 x 20, soit 2400 mots comportant une seule voyelle placée en première position.
De la même façon, il y a 2400 mots comportant une voyelle placée en deuxième position et 2400 mots comportant une voyelle placée en troisième position.

Mots à deux voyelles, c'est à dire à une consonne.
Si la consonne est placée en première position, il y a 20 façons de la choisir, puis 6 façons de choisir la voyelle placée en deuxième position et 6 façons de choisir la dernière voyelle.
Il y a donc 20 x 6 x6 soit 720 mots comportant une seule consonne placée en première position.

De la même façon, il y a 720 mots comportant une consonne placée en deuxième position et 720 mots comportant une consonne placée en troisième position.

3 x 2400 + 3 x 720 = 9360
On peut former 9360 mots de trois lettres comportant une ou deux voyelles.

Il y a évidemment d'autres méthodes possibles.
On peut par exemple calculer le nombre total de mots de trois lettres puis soustraire le nombre de mots ne comportant que des voyelles ou que des consonnes.
26 x 26 x 26 - 20 x 20 x 20 - 6 x 6 x 6 = 9360

Solution du problème n°44

Cherchons les longueurs possibles du train A :

nombre de wagons	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
longueur en m	15	27	39	51	63	75	**87**	99	111	123	135	147	159	171

Cherchons les longueurs possibles du train B :

nombre de wagons	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
longueur en m	17	31	45	59	73	**87**	101	115	129	143	157	171	185	199

La comparaison des tableaux montre que la plus petite longueur commune possible est 87 mètres.

La longueur du train A, exprimée en mètres, est la somme du nombre impair 15 et d'un nombre pair (produit de 12 par un entier), c'est donc un nombre entier impair.
La longueur du train C est la somme du nombre pair 18 et d'un nombre pair (produit de 14 par un entier), c'est donc un nombre pair.
Un nombre entier ne pouvant pas être à la fois pair et impair, les trains A et C ne peuvent pas avoir la même longueur.

Solution du problème n°45

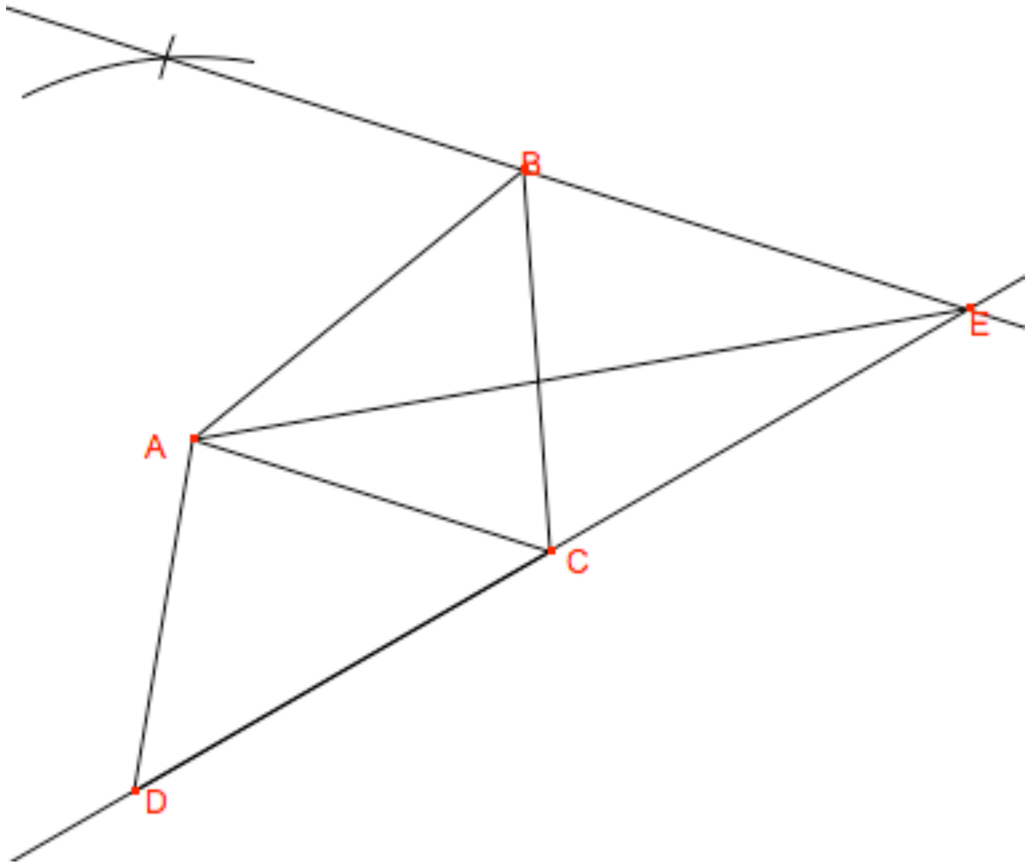
La population de la ville étant proportionnelle à l'aire du disque qui la représente, si on note p la population cherchée, on a :

$$\frac{p}{2\,000\,000} = \frac{\pi \times 6^2}{\pi \times 5^2}$$

$$p = \frac{2\,000\,000 \times 6^2}{5^2} = \quad 2\,880\,000$$

La ville représentée par un disque de 6 mm de rayon compte 2 880 000 habitants.

Solution du problème n°46



Voici une des nombreuses façons de procéder :

le quadrilatère initial est ABCD.
On construit la parallèle à (AC) passant par B.
Le point E est l'intersection de cette parallèle et de (DC).

Comme E est sur la parallèle à (AC) passant par B, les triangles ABC et AEC ont des hauteurs relatives à [AC] égales, ils ont donc la même aire.

L'aire de ABCD est la somme des aires de ADC et ABC.
L'aire du triangle ADE est la somme des aires de ADC et AEC.

ADE a donc la même aire que ABCD.

Solution du problème n°47

La vitesse de 60 km/h est égale à un kilomètre par minute.
Le véhicule parcourt donc : 10 km pendant les 10 premières minutes,
5 km pendant les 10 minutes suivantes,
2,5 km pendant les 10 minutes suivantes,
1,25 km pendant les 10 minutes suivantes.

Il lui reste alors 0,25 kilomètre, soit un quart de kilomètre à parcourir à la vitesse d'un seizième de kilomètre par minute (1 km/min dans la première période, puis 1/2, 1/4, 1/8 et 1/16).

Comme $\frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{16}$, 4 minutes seront nécessaires pour parcourir ce dernier tronçon.

La durée totale du trajet est donc de 44 minutes

Solution du problème n°48

Notons c, d et u les chiffres des centaines, dizaines et unités d'un nombre N à trois chiffres remplissant la condition.

N = 100 c + 10 d + u   2N = 100 u + 10 d + c

N = 2N - N = 100 u + 10 d + c - (100 c + 10 d + u) = 99 u - 99 c = 99 (u-c)

Il en résulte qu'un tel nombre N est multiple de 99.

écrivons tous les nombres de trois chiffres multiples de 99 (et inférieurs à 500 pour que 2N s'écrive avec trois chiffres) :   198   297   396   495

Aucun de ces nombres n'a la propriété cherchée, il est donc impossible qu'en doublant un nombre de trois chiffres on obtienne le nombre écrit avec les mêmes chiffres dans l'ordre inverse.

Remarque :

Il y a d'autres façons de traiter cette question, mais la plupart des méthodes raisonnables sont un compromis entre une étude systématique de tous les cas, fastidieuse, et un traitement entièrement algébrique, difficile.

Il s'agit par une première analyse de faire baisser considérablement le nombre de cas à étudier puis d'essayer de façon systématique tous les cas restant.

Solution du problème n°49

Considérons un nombre N s'écrivant $abcd$ en base 5

$$N = 125a + 25b + 5c + d$$

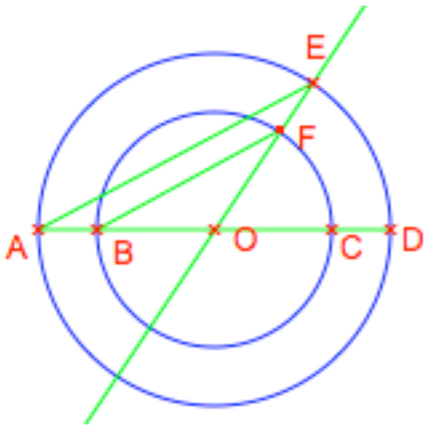
$$N = 124a + 24b + 4c + (a+b+c+d)$$

comme $124a + 24b + 4c$ est un nombre pair, N est pair si et seulement si $(a+b+c+d)$ est également pair.

Un nombre entier est pair si et seulement si la somme des chiffres de son écriture en base 5 est paire.

Ce critère a été démontré ci dessus pour un nombre à 4 chiffres, mais il est clair qu'il reste vrai pour un nombre comportant plus de chiffres puisque les puissances successives de 5 sont toutes impaires.

Solution du problème n°50



A et E sont sur le même cercle de centre O, donc OA = OE
B et F sont sur le même cercle de centre O, donc OB = OF

OA = OE et OB = OF donc $\frac{OB}{OA} = \frac{OF}{OE}$

Les points O, B et A sont alignés, les points O, F et E sont alignés dans le même ordre, de plus $\frac{OB}{OA} = \frac{OF}{OE}$, on en déduit (réciproque du théorème de Thalès) que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

F est sur le cercle de diamètre (BC), donc le triangle BFC est rectangle en F et les droites (BF) et (FC) sont perpendiculaires.

(FC) est perpendiculaire à (BF) et (BF) est parallèle à (AE) donc (FC) est perpendiculaire à (AE).