Problème n°51

Un véhicule effectue à 30 km/h le tiers d'un trajet, ce qui lui prend les deux tiers du temps total.
Le reste du trajet est effectué à vitesse constante, quelle est cette vitesse ?

Problème n°52

Cécile et Pierre jouent aux billes.
Au cours de la partie, Pierre perd un quart de ses billes, tandis que le nombre de Billes de Cécile augmente d'un tiers.
A eux deux, Cécile et Pierre ont 168 billes, combien chacun en avait-il au début de la partie ?

Problème n°53

Dans un lointain pays, Arthur XVIII a régné de 1057 à 1086 tandis que Tartempion III a régné de 1086 à 1114.
L'affirmation encadrée est-elle vraie ou fausse ?

Les données qui précèdent permettent d'affirmer que le règne d'Arthur XVIII fut plus long que celui de Tartempion III.

Problème n°54

On dispose de parallépipèdes rectangles identiques dont les dimensions sont 3 cm, 2 cm et 2 cm.
En assemblant un certain nombre de ces parallélépipèdes, mais sans les couper, on veut former un cube plein.
Quelles sont les dimensions du plus petit cube que l'on peut obtenir ?

Problème n°55

On considère un triangle ABC, et le cercle de diamètre [AB].
Ce cercle coupe (AC) en A et M, il coupe (BC) en B et N.
Les droites (AN) et (BM) se coupent en P.
Démontrer que (AB) et (PC) sont perpendiculaires.

Problème n°56

Indiquez un critère pour reconnaître les multiples de 9 d'après leur écriture en base 6.

On pourra se contenter de démontrer la propriété pour un nombre s'écrivant avec 5 chiffres au maximum en base 6.

Problème n°57

On lance successivement deux dés ordinaires.
Quelle est la probabilité pour que le nombre obtenu au second tirage soit plus grand que le premier ?

Problème n°58

N = 12 345 678 901 234 567 890 123 456 789 ?

Quel est le reste de la division de N par 18 ?

Problème n° 59

On doit transporter 30 objets pesant chacun 5 tonnes, 20 objets pesant chacun 11 tonnes et 40 objets pesant chacun 3 tonnes.
On dispose pour cela de camions pouvant tranporter chacun au maximum 19 tonnes.
Les objets à transporter sont lourds mais peu volumineux : toute combinaison dont le poids total ne dépasse pas 19 tonnes peut être placée sur un camion.

On veut transporter tous les objets en utilisant le moins possible de camions.
Combien de camions seront nécessaires ?

Problème n° 60

Parmi les nombres entiers de 1 à 10 000, combien y en a-t-il qui ont simultanément pour reste 5 dans la division par 30 et 3 dans la division par 50 ?

Solution du problème n°51

Il reste au véhicule à effectuer une distance double de celle qu'il a déjà parcourue, le tout dans un temps deux fois plus court, sa vitesse doit donc être quatre fois plus élevée, elle est égale à 120 km/h.

Solution du problème n°52

Le nombre de billes en jeu est constant, ce qui revient à dire que le nombre de billes perdues par Pierre est égal au nombre de billes gagnées par Cécile.
Un quart du nombre de billes de Pierre est égal à un tiers du nombre de billes de Cécile.
On peut donc imaginer les 168 billes réparties en 7 parties égales (les 4 quarts de ce qu'a Pierre et les 3 tiers de ce qu'a Cécile). Chaque partie comporte donc 168 : 7 soit 24 billes.
Il en résulte que Pierre avait 96 billes et Cécile 72.

Le raisonnement est illustré par le schéma ci-dessous où la partie en blanc représente les billes de Pierre et celle en gris les billes de Cécile.

Bien entendu (et c'est aussi vrai pour le problème 51 par exemple) un raisonnement algébrique serait également accepté au CRPE, nous donnons ici une version n'utilisant pas l'algèbre pour rappeler que c'est parfaitement valide et accepté au concours.

Solution du problème n°53

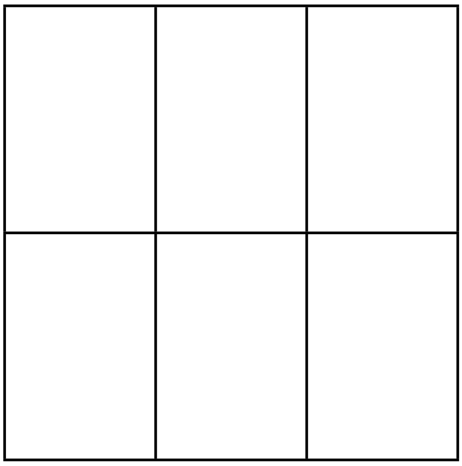
L'affirmation est fausse, car rien n'indique la période de l'année où ont commencé et où se sont achevés les règnes.
Si par exemple Arthur XVIII a régné du 31 décembre 1057 au premier janvier 1086 soit 28 ans et un jour, et si Tartempion III a régné du 2 janvier 1086 au 31 décembre 1114 soit presque 29 ans, le règne de Tartempion est le plus long.

Solution du problème n°54

Le volume du pavé étant de 12 cm^3, le volume (en cm^3) d'un cube formé en assemblant de tels pavés est un multiple de 12.
Par ailleurs, les arêtes du pavé ayant des dimensions entières, ce sera aussi le cas des arêtes du cube. Les premiers cubes d'arête entière ont pour volume : 1 ; 8 ; 27 ; 64 ; 125 ; 216

216 = 18 x 12, le volume du cube est donc égal au volume de 18 pavés, ce qui ne suffit pas à prouver qu'on peut réaliser le cube sans découper les pavés : il faut s'assurer qu'il existe une disposition correcte des pavés.

Une telle disposition est obtenue en plaçant les pavés en trois couches identiques à celle dessinée ci-dessous (qui a une épaisseur de 2 cm).



Solution du problème n°55

M est sur le cercle de diamètre [AB], il en résulte que ABM est rectangle en M. Les droites (AM) et (MB) sont alors perpendiculaires, et comme (AM) n'est autre que (AC), (MB) est la hauteur issue de A du triangle ABC.

On démontre de la même façon que (AN) est la hauteur issue de A du triangle ABC.

Il résulte des deux points précédents que le point P, intersection de (AN) et (BM) est l'orthocentre du triangle ABC.

La droite (PC), qui passe par le sommet C et l'orthocentre P du triangle ABC, est la hauteur issue de C de ce triangle, elle est donc perpendiculaire au côté opposé [AB].

En cas de difficulté importante sur ce genre d'exercice, vous trouverez quelques conseils sur les pages suivantes :

Pour chercher une démonstration :
http://primaths.fr/futur%20maitres/demonstrations/chercherunedemon.html

Pour la rédiger :
http://primaths.fr/futur%20maitres/demonstrations/demos%20a%20corriger/demonstration.html

Pour mémoriser les propriétés :
http://primaths.fr/futur%20maitres/demonstrations/proprietesgeomet.html

Solution du problème n°56

étudions l'écriture en base 6 des premiers multiples de 9.

écriture en base 10	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
écriture en base 6	0	13	30	43	100	113	130	143	200	213	230

Il semblerait que les multiples de 9 se reconnaissent dans leur écriture en base 6 au fait que leurs deux derniers chiffres sont 00, 13, 30 ou 43.
Idée directrice de la preuve : Un nombre de plus de deux chiffres peut s'écrire sous la forme d'une somme d'un nombre se terminant par deux zéros et d'un nombre de deux chiffres (exemple : 34215 = 34200 + 15).
Or, en base 6, un nombre se terminant par deux zéros est multiple de 36, donc de 9.
Le nombre initial sera donc multiple de 9 si et seulement si le nombre constitué de ses deux derniers chiffres l'est également.

Preuve rédigée : Considérons un nombre n qui s'écrit avec 5 chiffres en base 6
$n = \overline{abcde} = a \times 6^4 + b \times 6^3 + c \times 6^2 + d \times 6 + e$
or $6^2 = 36$ est multiple de 9, et il en est évidemment de même des puissances suivantes de 6, il en résulte que $a \times 6^4 + b \times 6^3 + c \times 6^2$ est un multiple de 9

n est donc la somme d'un multiple de 9 et du nombre $d \times 6 + e$.
n est donc multiple de 9 si et seulement si $d \times 6 + e$ est également multiple de 9.
or $d \times 6 + e$ est le nombre qui s'écrit $\overline{de}$ en base 6, il s'agit des deux derniers chiffres de n.

En conclusion, n est multiple de 9 si le nombre écrit avec ses deux derniers chiffres en base 6 est multiple de 9. un retour au tableau ci-dessus montre que n est multiple de 9 si ses deux derniers chiffres sont 00, 13, 30 ou 43.

Solution du problème n°57

premier tirage

Second tirage

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Les 36 cases de ce tableau représentent toutes les issues possibles des deux tirages, tandis que les 15 cases grisées représentent toutes les issues favorables.
La probabilité cherchée est donc 15/36 ou 5 / 12.

Solution du problème n° 58

La somme des chiffres de N est égale à 135, soit 15 x 9, N est donc multiple de 9.
N peut donc s'écrire sous la forme 9 n, ou n est un entier.
De plus, N est impair donc n l'est également, on peut écrire n sous la forme 2k + 1 (k entier).

On a alors N = 9 (2k + 1) = 18 k + 9, ce qui établit que le reste de la division de N par 18 est 9.

Solution du problème n° 59

La masse totale des objets à transporter est de 30 x 5t + 20 x 11t + 40 x 3 t, soit 490 t.

En posant la division euclidienne de 490 par 19, on constate que 490 = 25 x 19 + 15.

Cela prouve qu'il est impossible de transporter tous les objets en 25 camions, il en faudra 26 ou plus de 26.

En revanche, ce calcul ne prouve pas qu'il est possible de tout transporter en 26 camions. il faut pour cela montrer une répartition possible des objets.
En effet, dans un problème analogue dans lequel on aurait 49 objets de 10 tonnes, la même dividion euclidienne pourrait être effectuée, il est pourant clair qu'on ne transporterait qu'un objet par voyage. 49 voyage seraient nécessaires.

Une répartition possible des objets est la suivante :

20 camions transportant chacun un objet de 11t, un de 5t et un de 3t.
5 camions transportant chacun 2 objets de 5t et 3 objets de 3t.
1 camion transportant 5 objets de 3t.

Ceci établit qu'on peut effectivement faire le transport avec 26 camions, le calcul précédent ayant montrer que c'est impossible avec moins de 26 camions, le nombre de camions nécessaire est 26.

Solution du problème n° 60

Comme toujours, il convient avant de se lancer dans les calculs d'explorer un peu la situation :
Quels sont les premiers nombres entiers ayant pour reste 5 dans la division par 30 :
35 65 95 125 155…

Quels sont les premiers nombres entiers ayant pour reste 3 dans la division par 50 :
53 103 153 203 263…

Les nombres de la première liste ont tous 5 comme chiffre des unités alors que le chiffre des unités est 3 dans la seconde liste… reste à mettre en forme cette constatation pour prouver qu'elle est générale (elle se poursuit si on poursuit la liste) et qu'il n'y a donc aucun nombre qui appartienne aux deux listes.

Une rédaction possible :

Un nombre ayant pour reste 3 dans la division par 50 peut s'écrire 50a + 3, où a est un entier. Il vaut donc 10 x 5a + 3, son reste dans la division euclidienne par 10 est donc 3.

Un nombre ayant pour reste 5 dans la division par 30 peut s'écrire 30b + 5, où b est un entier. Il vaut donc 10 x 3b + 5, son reste dans la division euclidienne par 10 est donc 5.

Le reste dans la division par 10 d'un entier donné est unique, aucun nombre ne peut donc satisfaire simultanément aux deux conditions données dans cet exercice.