Problème n°61

Dans un tableur, on écrit un nombre dans la cellule A1
Dans les cellules en dessous on entre successivement les formules suivantes :

dans A2 : = MOD (A1 ; 10)
dans A3 : = A1 - A2
dans A4 : = A3 / 10
dans A5 : = MOD (A4 ; 10)

La fonction MOD donne le reste de la division euclidienne du premier nombre de la parenthèse par le deuxième, ainsi MOD (23 ; 5) retourne la valeur 3, reste de la division de 23 par 5.
Les nombres utilisés peuvent, comme pour toute formule dans un tableur, être donnés explicitement ou par référence à la cellule dans laquelle ils se trouvent.

Quel nombre s'affiche en A5 si on place en A1 successivement les valeurs 48, 437, 1508 ?

De façon générale, décrire le lien entre le résultat affiché en A5 et le nombre affiché en A1.

Problème n° 62

On dispose d'un pavé droit dont les dimensions sont 4 cm, 5 cm et 6 cm.
A et B sont deux sommets opposés de ce pavé (c'est à dire qu'ils n'appartiennent pas à une même face).
On étudie les chemins reliant A et B en restant à la surface du pavé.
Est-il possible de tracer un tel chemin dont la longueur soit inférieure à 11 cm ?

Conseil : utiliser un ou des patrons du pavé pour rechercher des chemins, plutôt qu'un dessin en perspective.

Problème n° 63

A, B, C, D et E sont quatre points situés sur un même cercle.
B', C' et D' sont les milieux respectifs de [AB], [AC], et [AD].
Démontrer que A, B', C' et D' sont également sur un même cercle que l'on définira.

Problème n° 64

Combien de nombres entiers de 1 à 1 000 ont un reste égal au quotient dans leur division euclidienne par 50 ?

Problème n° 65

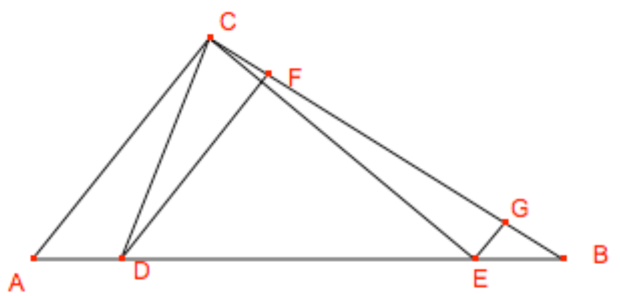
Un récipient a intérieurement la forme d'un pavé droit dont la base placée horizontalement est un carré de 5 cm de côté. Ce récipient contient un litre de liquide.
Quelle est la hauteur de la colonne de liquide contenue dans le récipient ?

Le liquide est constitué d'une partie d'eau, au dessus de laquelle se trouve une partie d'huile.
La masse d'un litre d'eau est de 1000 g, celle d'un litre d'huile de 920 g, et la masse du litre de liquide contenu dans le récipient (eau et huile) est de 950 g.

Quelle est la hauteur de la colonne d'eau ?

Problème n° 66

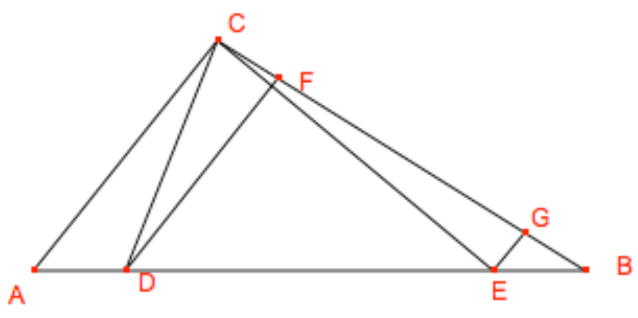
ABC est un triangle dont le côté [AB] mesure 12 cm, et dont l'aire mesure 30 cm^2.



D et E sont deux points de [AB] tels que AD = 2 cm, et BE = 2 cm.
La parallèle à (AC) passant par D coupe [BC] en F.
La parallèle à (AC) passant par E coupe [BC] en G.
On admettra si nécessaire que lest triangles BDF et BEG sont des réductions du triangle ABC.
Comparer les aires du triangle CDE et du trapèze DFGE.

Problème n° 67

Ce problème est le même que le précédent, étendu à un cas plus général.



D et E sont deux points de [AB] tels que AD = BE.
La parallèle à (AC) passant par D coupe [BC] en F.
La parallèle à (AC) passant par E coupe [BC] en G.

On admettra si nécessaire que lest triangles BDF et BEG sont des réductions du triangle ABC.

Comparer les aires du triangle CDE et du trapèze DFGE.

Problème n° 68

A = 35 634 942
B = 6 x 777 775 + 3 x 77 777 774

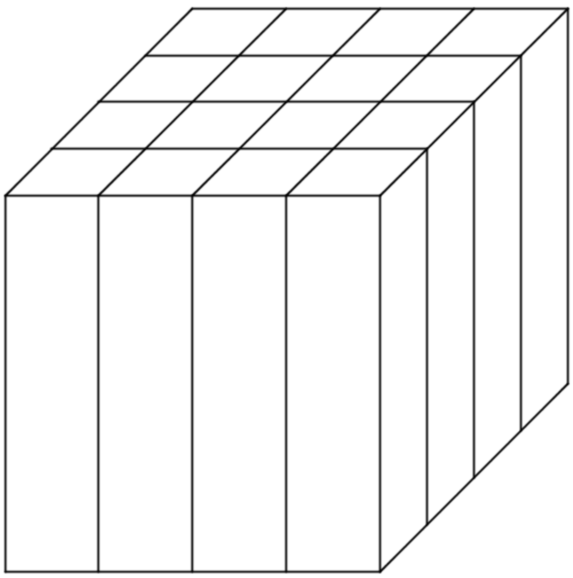
Les nombres A et B sont-ils multiples de 7 ?
On répondra à cette question sans poser aucune division euclidienne ni utiliser de calculatrice.

Problème n° 69

Pour peindre toutes les faces d'un cube avec une couche de peinture d'épaisseur constante, il faut 80 g de peinture.

Au lieu de peindre le cube entier, on le découpe ce en 16 parallélépipèdes idendiques comme indiqué par le shéma ci dessous, et on peint tous ces parallélépipèdes avec la même peinture, appliquée en unc couche de même épaisseur que celle envisagée pour le cube entier.

Quelle masse de peinture est nécessaire ?



Problème n° 70

Est-il possible d'écrire le nombre 41 580 sous la forme d'un produit de deux nombres entiers tous les deux supérieurs à 190 ?
Cette question doit (bien entendu) être résolue sans calculatrice.

Solution du problème n°61

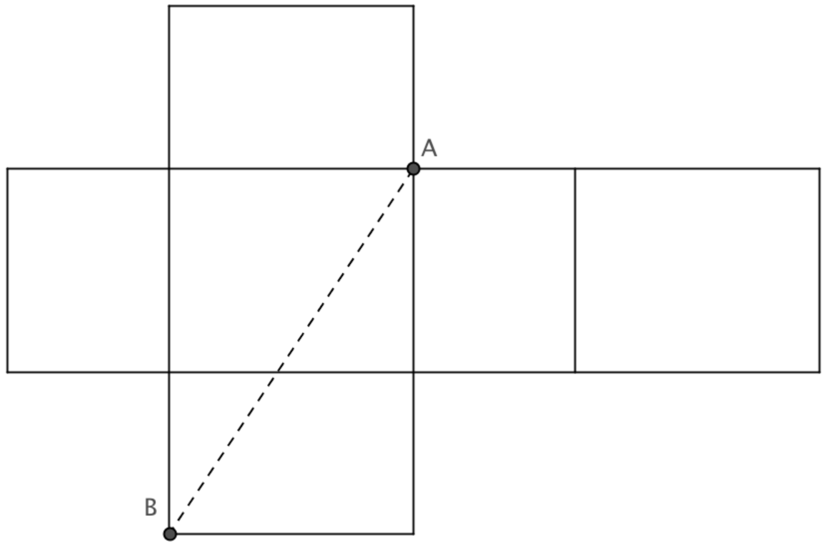
soit N le nombre inscrit en A1.
Soient n et r le quotient et le reste de la division euclidienne de N par 10
On a alors N = 10n + r

Dans A2, on obient r, qui est aussi le chiffre des unités de N
Dans A3, on obtient N - r, soit 10n
Dans A4 on obtient n
Dans A5 on obtient, par le même procédé qu'en A2, le chiffre des unités de n.
Comme n, quotient euclidien de N par 10, s'écrit en enlevant à N son dernier chiffre, le chiffre des unités de n est aussi le chiffre des dizaines de N.

La cellule A5 contient donc toujours le chiffre des dizaines de la cellule A1.

Solution du problème n° 62

Sur le patron suivant (qui n'est pas en vraie grandeur), la longueur du segment tracé en pointillé se calcule aisément à l'aide du théorème de Pythagore.



$$AB^2 = (4+5)^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117$$

$$AB = \sqrt{117} < 11$$

La longueur de ce trajet ne change pas si on replie le patron pour former le pavé, il est donc possible de tracer sur le pavé un trajet AB de longueur inférieure à 11 cm.

Remarque : si on utilise la diagonale d'un rectangle formé par deux autres faces que celles données dans la solution, on obtient un trajet plus long.
La réponse donnée ci dessus ne comporte que le trajet qui convient, ce qui ne veut pas dire qu'il doit être trouvé du premier coup, une phase de tâtonnement à l'aide de plusieurs patrons différents est pratiquement indispensable.

Solution du problème n° 63

Considérons le point O, centre du cercle donné.
Nous allons démontrer que chacun des points B', C' et D' appartient au cercle de diamètre [AO].

Intéressons nous au point B', deux cas sont possibles :
B est diamétralement opposé à A sur le cercle donné, alors B' est confondu avec O et appartient au cercle de diamètre [AO].
B n'est pas diamétralement opposé à A, alors AOB est un triangle isocèle en O.
Le milieu B' de [AB] est alors le pied de la hauteur issue de O, il en résulte que le triangle AOB' est rectangle en B', et donc que B' est situé sur le cercle de diamètre [AO].

La démonstration faite pour B' vaut également pour C' et D' : les points A, B', C' et D' sont tous situés sur le cercle de diamètre [AO].

Remarques :
Le cas essentiel est celui ou A et B ne sont pas diamètralement opposés, le jury serait probablement tolérant pour les candidats qui n'étudient que ce cas.

D'autres démonstrations sont possibles, par exemple on peut montrer que, dans le triangle AOB, si O' est le milieu de [AO], O'B' = 1/2 OB. En prouvant la même chose pour C' et D', on établit que les 4 points sont à la même distance de O'.

On peut aussi, si on dispose des connaissances nécessaires, utiliser l'homothétie de centre A et de rapport 1/2. Cette méthode est très directe mais utilise des notions non exigibles au CRPE.

Solution du problème n° 64

Soit n un des nombres cherchés.
Soit q son quotient (et son reste) dans la division euclidienne par 50.
On a alors $n = 50\,q + q = 51q$.
Les nombres ayant un quotient égal au reste dans le division par 50 ne sont autres que les multiples de 51 (jusqu'à 51 x 49 puisque le reste dans la division par 50 ne peut excéder 49).

La division euclidienne de 1 000 par 51 a pour quotient 19.
Le plus petit des nombres cherchés est donc 1 x 51, le plus grand est 19 x 51 = 969, et tous les multiples de 51 situés entre les deux conviennent également (2 x 51, 3 x 51…).

De 1 à 1 000, il y a donc 19 nombres entiers ayant un reste égal au quotient dans la division euclidienne par 50.

Solution du problème n° 65

Un litre, c'est un décimètre cube, c'est à dire 1 000 centimètres cubes.
Si on appelle h la hauteur de la colonne, mesurée en cm, on a donc h x 5 x 5 = 1 000, soit h = 40.
La hauteur de la colonne de liquide est de 40 cm.

Deuxième question, version arithmétique.
Si le litre entier était constitué d'huile, sa masse serait de 920 g.
A chaque fois qu'on remplace un décilitre d'huile par un décilitre d'eau, la masse augmente de 8 g (on remplace 92 g par 100g).
Pour faire passer la masse totale de 920 g à 950 g, c'est à dire l'augmenter de 30 g combien de fois faut-il effectuer un tel remplacement ?
30 : 8 = 3,75 Il faut donc effectuer le remplacement de 3,75 dl d'huile par de l'eau.

un litre de liquide ayant une hauteur de 40 cm, 3,75 dl ont une hauteur de 3,75 x 4 soit 15 cm.
La colonne d'eau mesure 15 cm.

Deuxième question, version algébrique.
soit x la hauteur de la colonne d'eau en cm.
la colonne d'huile mesure alors 40 - x
La masse de chaque liquide est proportionnelle à sa hauteur, on a donc

$$1000\frac{x}{40}+920\frac{40-x}{40}=950$$

$$1000x+36800-920x=38000$$

$$80x=1200$$

$$x=\frac{1200}{80}=15$$

La hauteur de la colonne d'eau est donc de 15 cm.

Solution du problème n° 66

Comparer deux grandeurs, c'est dire laquelle est la plus grande, ou éventuellement constater qu'elles sont égales.
Quand il s'agit d'aires, il est parfois possible d'effectuer la comparaison sans recourir à leurs mesures, en prodédant à des découpages et réassemblages de figures.

Cette méthode ne nous semblant pas prometteuse ici, nous allons procéder au calcul de la mesure de l'aire de chacune des deux figures pour les comparer.

Les triangles ABC et DEC ont la même hauteur issue de C, leur aire est donc proportionnelle à la longueur du côté opposé à C.
Or AB = 12 cm et DE = 8 cm, il en résulte que $\frac{DE}{AB}=\frac{2}{3}$ et donc que $\frac{Aire(CDE)}{Aire(ABC)}=\frac{2}{3}$
Comme l'aire de ABC mesure 30 cm^2, on en déduit que celle de CDE mesure 20 cm^2.

Le triangle BDF est une réduction du triangle ABC.
Le coefficient de la réduction est $\frac{10}{12}$ puisque le côté AB mesure 12 cm et le côté correspondant du triangle réduit, BD, mesure 10 cm.
Dans une réduction, l'aire est multipliée par le carré du coefficient de réduction, on a donc :

$$Aire(BDF) = Aire(ABC) \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 30 \times \frac{25}{36} = \frac{125}{6} cm^2$$

Le triangle BEG est une réduction du triangle ABC.

Le coefficient de la réduction est $\frac{2}{12}$ puisque le côté AB mesure 12 cm et le côté correspondant du triangle réduit, BE, mesure 2 cm.

Dans une réduction, l'aire est multipliée par le carré du coefficient de réduction, on a donc :

$$Aire(BEG) = Aire(ABC) \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 30 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{6} cm^2$$

L'aire du trapèze DFGE est la différence enre les aires de BDF et BEG, elle mesure donc $\frac{120}{6} cm^2$, soit 20 cm^2.

Le trapèze DFGE et le triangle CDE ont des aires égales.

Solution du problème n° 67

Nous allons essayer de reprendre ici la méthode utilisée dans l'exercice 66.
Cependant, l'absence de données numériques va nous obliger à remplacer les calculs effectués avec les nombres de l'énoncé par des calculs litéraux.

On notera c la longueur du côté [AB], x la mesure de la longeur de [AD] et de [BE].

Les triangles ABC et DEC ont la même hauteur issue de C, leur aire est donc proportionnelle à la longueur du côté opposé à C.

DE = $c-2x$, il en résulte que $\frac{DE}{AB} = \frac{c-2x}{c}$ et donc que $\frac{Aire(CDE)}{Aire(ABC)} = \frac{c-2x}{c}$

On obtient donc : $Aire(CDE) = \frac{c-2x}{c} Aire(ABC)$

Le triangle BDF est une réduction du triangle ABC.

Le coefficient de la réduction est $\frac{BD}{AB} = \frac{c-x}{c}$.

Dans une réduction, l'aire est multipliée par le carré du coefficient de réduction, on a donc :

$$Aire(BDF) = Aire(ABC) \times \left(\frac{c-x}{c}\right)^2 = Aire(ABC) \times \frac{c^2-2cx+x^2}{c^2}$$

Le triangle BEG est une réduction du triangle ABC.

Le coefficient de la réduction est $\frac{x}{c}$.

Dans une réduction, l'aire est multipliée par le carré du coefficient de réduction, on a donc :

$$Aire(BEG) = Aire(ABC) \times \left(\frac{x}{c}\right)^2 = Aire(ABC) \times \frac{x^2}{c^2}$$

L'aire du trapèze DFGE est la différence enre les aires de BDF et BEG, on a donc :

$$Aire(DFGE) = Aire(ABC) \times \frac{c^2 - 2cx + x^2}{c^2} - Aire(ABC) \times \frac{x^2}{c^2}$$

$$Aire(DFGE) = Aire(ABC) \times \left(\frac{c^2 - 2cx + x^2}{c^2} - \frac{x^2}{c^2}\right)$$

$$Aire(DFGE) = Aire(ABC) \times \frac{c^2 - 2cx}{c^2} = Aire(ABC) \times \frac{c - 2x}{c}$$

Le trapèze DFGE et le triangle CDE ont des aires égales.

Solution du problème n° 68

A = 35 634 942
A = 35 000 000 + 630 000 + 4 900 + 42
A = 7 x 5 000 000 + 7 x 90 000 + 7 x 700 + 7 x 6
A = 7 x (5 000 000 + 90 000 + 700 + 6) A est donc multiple de 7.

B = 6 x 777 775 + 3 x 77 777 774
B = 6 x 777 770 + 6 x 5 + 3 x 77 777 770 + 3 x 4
B = 6 x 7 x 111 110 + 3 x 7 x 11 111 110 + 42
B = 7 x (6 x 111 110 + 3 x 11 111 110 + 6) B est donc multiple de 7.

Solution du problème n° 69

Les faces à peindre sont celles du cube initial, auquelles on ajoute les faces créées par les coupes. Chaque plan de coupe crée une nouvelle surface à peindre, qui correspond à deux faces de cube. Comme il y a 6 plans de coupe, cela revient à créer une surface correspondant à 12 faces de cube.
En tenant compte des 6 faces existantes au départ, l'aire de la surface totale à peindre a donc été triplée.
La quantité de peinture nécessaire triple également, il faut maintenant 240 g de peinture.

Solution du problème n° 70

Une méthode consiste à essayer systématiquement tous les entiers à partir de 191, on pose la division euclidienne de 41580 par l'entier essayé, si le reste est nul le diviseur testé et le quotient fournissent les entiers recherchés. Si le reste n'est pas nul, on passe à l'entier suivant.
Comme 204 x 204 = 41 616 > 41 580, l'un des deux nombres entiers cherchés doit être inférieur à 204. Cette méthode demandera donc, dans le pire des cas, d'effectuer 13 divisions euclidiennes, ce qui reste envisageable.

On peut préférer s'appuyer sur la décomposition de 41580 en facteurs premiers.
41 580 = 4 158 x 10
41 580 = 2 079 x 2 x 2 x 5
41 580 = 693 x 3 x 2 x 2 x 5
41 580 = 231 x 3 x 3 x 2 x 2 x 5
41 580 = 77 x 3 x 3 x 3 x 2 x 2 x 5
41 580 = 7 x 11 x 3 x 3 x 3 x 2 x 2 x 5
Pour décomposer 41 580 en un produit de deux entiers, il suffit de séparer en deux parties sa décomposition en facteurs premiers… on cherche donc une partie de la décomposition sont la valeur est légèrement supérieure à 190.

Comme l'une des deux parties de la décomposition contient le facteur 11, voyons quels sont les multiples de 11 proches de 190 :
198 = 18 x 11 peut s'écrire sous la forme 2 x 3 x 3 x 11 = 198.
En multipliant ce nombre par la partie restante de la décomposition, soit 7 x 3 x 2 x 5 = 210, on obtient évidemment 41 580.

41 580 est le produit de 198 par 210, il est donc possible de l'écrire sous la forme d'un produit de deux entiers tous les deux supérieurs à 190