Problème n° 71

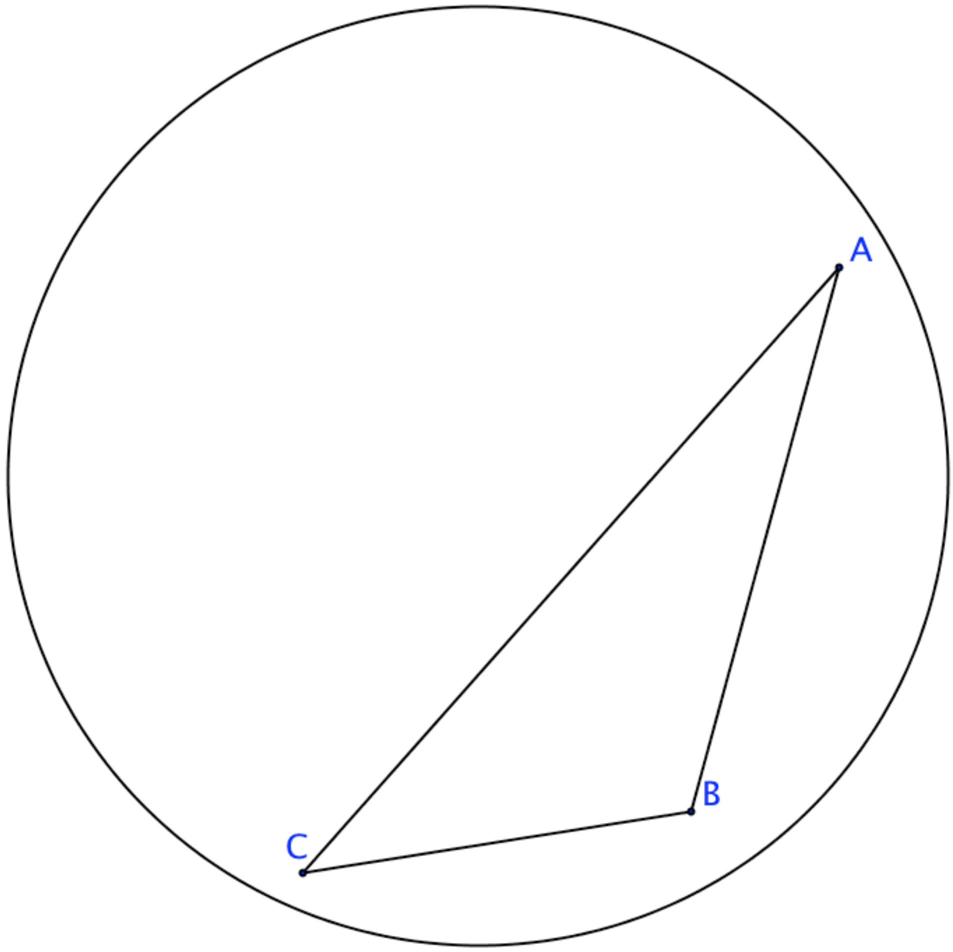
On veut construire sur la figure ci-contre un triangle ayant toutes les propriétés qui suivent :

L'aire de ce triangle est égale à celle du triangle ABC.

Deux des trois sommets du triangle sont choisis parmi les points A, B et C.

Le troisième sommet du triangle est sur le cercle.

Construire toutes les positions possibles du sommet situé sur le cercle.



Problème n° 72

Combien y a-t-il de nombres entiers qui s'écrivent avec 4 chiffres en base 7 ?

Problème n° 73

On jette simultanément deux dés ordinaires, quelle est la probabilité que l'un au moins des deux dés donne 6 ?

Problème n° 74

le quadrilatère non croisé ABCD possède les propriétés suivantes :
AB = BC = CD. Les angles de sommet A et B sont droits.
Peut-on affirmer que ABCD est un carré ?

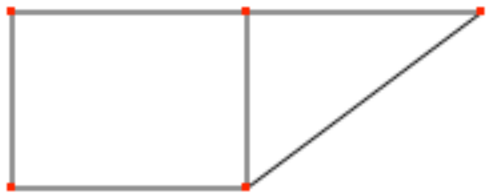
Problème n° 75

$365874^2 = 133863783876$
Montrer comment on peut utiliser l'égalité précédente pour déterminer les valeurs de
$A = 365875^2$, $B = 365869^2$ et $C = 365884 \times 365864$ sans poser effectivement les multiplications demandées.

Problème n° 76

Deux marcheurs se dirigent l'un vers l'autre.
André part du point A à 9 heures, il se dirige vers B, situé à 12 km de A, à la vitesse constante de 6 km/h.
Bernard par de B à 9 h 30, il se dirige vers A à la vitesse constante de 4 km/h.
A quelle heure les deux marcheurs se croiseront-ils ?

Problème n° 77



Le dessin ci-contre représente une partie du patron d'un prisme droit. Compléter ce patron.

Problème n° 78

Un professeur note ses élèves sur 20.
Pour calculer la note moyenne de la classe, il calcule la moyenne des notes du groupe des filles, la moyenne des notes du groupe des garçons, puis effectue la moyenne de ces deux notes.

La moyenne obtenue par cette méthode est elle la même que s'il calculait directement la moyenne de toutes les notes ?

Problème n° 79

Du 3 mars 2012 à 11 h 37 au 27 juillet 2012 à 15 h 08, combien de secondes se sont-elles écoulées ? Il va de soit que l'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

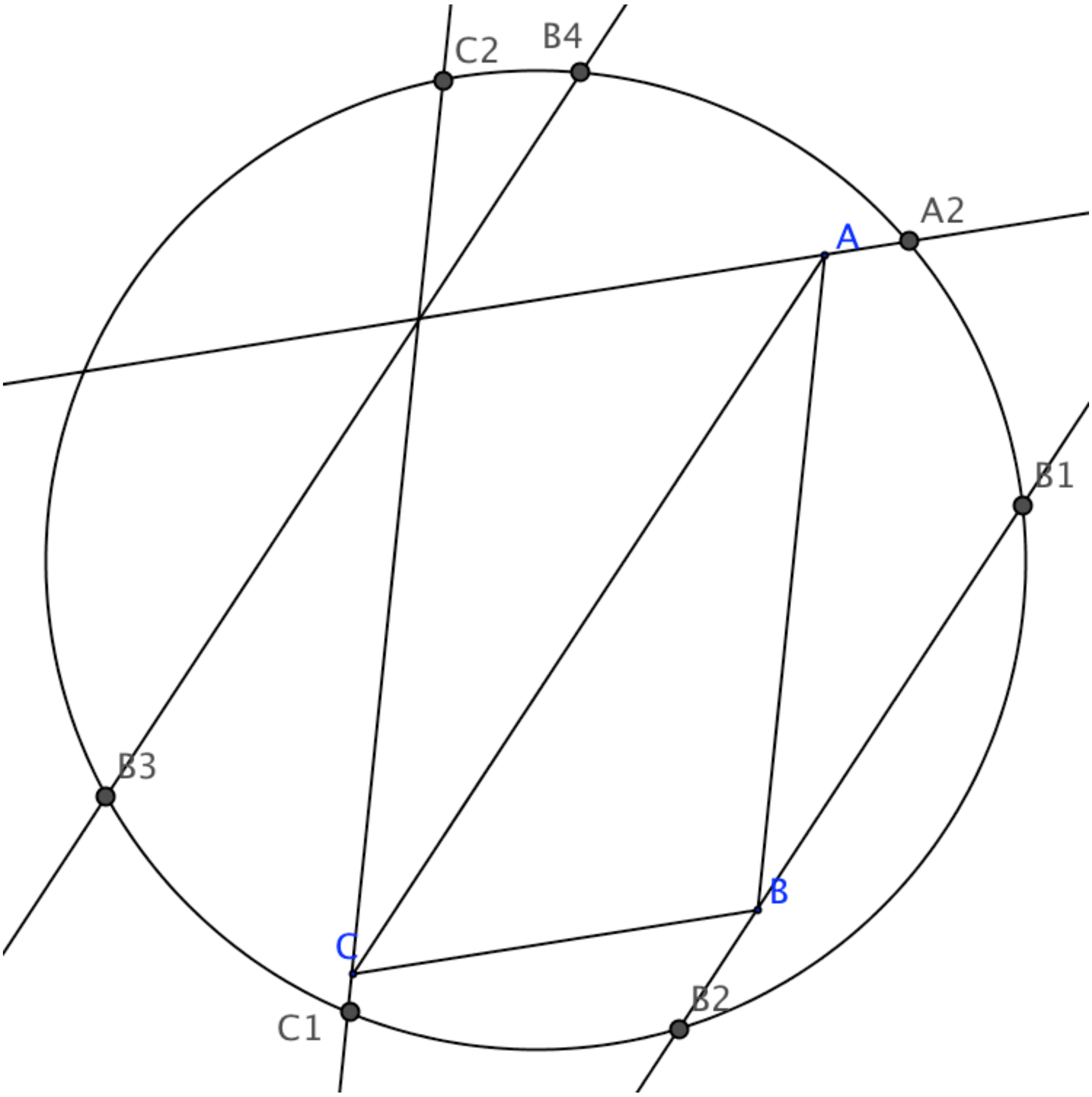
Problème n° 80

Le prix d'un même arcticle est de 20% plus élevé dans le magasin A que dans le magasin B.
Le responsable du magasion B décide de d'augmenter le prix de cet article de 14%.
De quel pourcentage le responsable du magasin A doit-il baisser son prix s'il veut qu'après les deux modifications l'article soit vendu au même prix dans les deux magasins ?

Solution du problème n° 71

Pour construire un triangle ABC_1 ayant la même aire que ABC, comme le côté [AB] est conservé, il faut que la hauteur issue de C_1 ait la même longueur que la hauteur issue de C.
Pour cela, C_1 doit être placé soit sur la parallèle à (AB) passant par C, soit sur la parallèle à (AB) située à la même distance de (AB), mais de l'autre côté.

Sur la figure ci-dessous, seules les parallèles ayant des intersections avec le cercle ont été tracées puisque les autres ne fournissent pas de triangle.



Solution du problème n° 72

Le plus petit nombre s'écrivant avec quatre chiffres en base 7 s'écrit $\overline{1000}$ dans cette base, il vaut 7^3 soit 343.

Le plus petit nombre s'écrivant avec cinq chiffres en base 7 s'écrit $\overline{10000}$ dans cette base, il vaut 7^4 soit 2401.

Le plus grand nombre s'écrivant avec quatre chiffres en base 7 est celui qui précède 2 401, c'est 2 400.

En conséquence, les nombres entiers s'écrivant avec 4 chiffres en base 7 vont de 343 à 2 400, il y en a 2 400 - 343 + 1 soit 2 058.

Solution du problème n° 73

Dé A / Dé B	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Le tableau ci-dessus montre que parmi les 36 issues possibles du tirage, toutes équiprobables, 11 sont favorables.

La probabilité qu'un des dés au moins donne 6 est donc de $\frac{11}{36}$

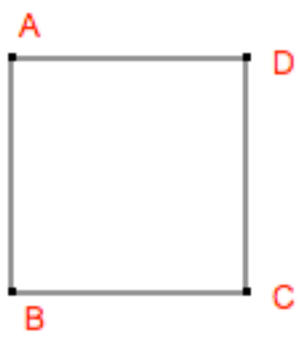
Autre présentation possible :
Appelons A et B les deux dés.
La probabilité pour que le dé A donne 6 est 1/6.
L'issue est alors favorable quel que soit le tirage du dé B.

La probabilité pour que le dé A ne donne pas 6 est 5/6.

La probabilité pour que le dé A ne donne pas 6 et que le dé B donne 6 est $\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$ soit $\frac{5}{36}$

La probabilité qu'un des deux dés au moins donne 6 est donc égale à $\frac{5}{36}+\frac{1}{6}=\frac{5}{36}+\frac{6}{36}=\frac{11}{36}$

Solution du problème n° 74



Les angles de sommets A et B sont droits, par conséquent les droites (AD) et (BC) sont toutes deux perpendiculaires à (AB), on en déduit que (AD) est parallèle à (BC).

Considérons le point D', intersection de la droite (AD) et de la parallèle à (AB) passant par C.
Le quadrilatère ABCD' est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. De plus il a un angle droit donc c'est un rectangle. Ce rectangle a deux côtés consécutifs

égaux, donc c'est un carré.
Supposons maintenant que D' soit distinct de D, alors CDD' serait un triangle rectangle en D', et la longueur de l'hypoténuse, CD, serait supérieur à la longueur CD' d'un côté de l'angle droit.
Comme CD' = AB, on ne pourrait par conséquent pas avoir AB = CD.
Par conséquent, les points D et D' sont confondus, et ABCD est un carré.

Attention : la rédaction de cette démonstration est délicate. Il est évidemment possible de rédiger correctement de façon très différente de l'exemple ci-dessus, mais il y a aussi beaucoup de fausses démonstrations possibles…
Vérifiez donc si chacune de vos étapes s'appuie sur une propriété connue (et pas seulement une affirmation qui vous arrange et qui donne l'impression d'être vraie).

Solution du problème n° 75

$365\,874^2 = 133\,863\,783\,876$
Les calculs demandés sont possibles en s'appuyant sur les «identités remarquables».
Posons n = 365874, on a alors :

$A = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$
$A = 133\,863\,783\,876 + 731\,748 + 1 = 133\,864\,515\,625$

$B = (n - 5)^2 = n^2 - 10\,n + 25$
$B = 133\,863\,783\,876 - 3\,658\,740 + 25 = 133\,860\,125\,161$

$C = (n + 10)\,(n - 10) = n^2 - 100 = 133\,863\,783\,876 - 100 = 133\,863\,783\,776$

Solution du problème n° 76

Version arithmétique :

A 9 h 30, André aura parcouru 3 km, la distance séparant les deux marcheurs sera donc de 9 km. à partir de 9h30, les deux personnages marchent, la distance qui les sépare diminue donc de 10 km par heure. Pour qu'elle devienne nulle, il faut qu'elle diminue de 9 km, ce qui demandera donc 9 dixièmes d'heure soit 54 minutes.

La rencontre aura donc lieu 54 minutes après 9 h 30, soit à 10 h 24 minutes.

Version algébrique :

Appelons a le nombre d'heures de marche d'André (de son départ à la rencontre).
Le nombre de kilomètres parcourus par André (de A au point de rencontre) est alors $6a$.
Le nombre d'heures de marche de Bernard (de son départ à la rencontre) est $a - \frac{1}{2}$

Le nombre de kilomètres parcourus par Bernard (de B au point de rencontre) est $4 \times \left(a - \frac{1}{2} \right)$

A eux deux, les deux personnages ont parcouru au moment de la rencontre la distance AB, on a donc :

$$4 \times \left(a - \frac{1}{2} \right) + 6a = 12$$
$$4a - 2 + 6a = 12$$
$$10a = 14$$
$$a = \frac{14}{10} = 1 + \frac{4}{10}$$

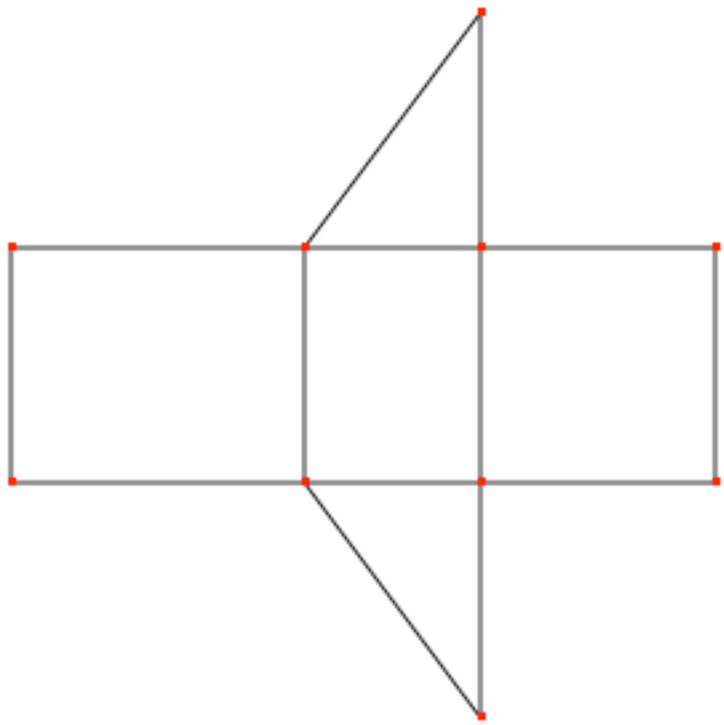
La rencontre a donc lieu une heure et quatre dixièmes d'heure après le départ d'André, soit à 10 h 24 minutes.

Quelques rappels :

L'usage de l'algèbre n'est nullement obligatoire.
Il est possible de mélanger algèbre et arithmétique dans une même solution (par exemple en commençant par décrire la situation à 9 h 30 avant de passer à l'algèbre).
Il est souvent possible de se limiter à une inconnue (on aurait pu appeler b le nombre de km parcourus par Bernard, mais au prix d'une complexité inutile).
Des expressions comme «nombre d'heures de marche de Bernard entre sont départ et la rencontre» sont plus lourdes que «durée du trajet de Bernard» mais évitent bien des ambiguïtés, sur les unités utilisées par exemple.

Solution du problème n° 77

Dans un prisme droit, seules les bases peuvent ne pas être rectangulaires (si elles sont rectangulaires, le prisme droit est alors un pavé droit).
Le prisme droit demandé a donc deux bases qui sont des triangles rectangles, et trois faces latérales rectangulaires.
Voici un des dessins du patron complet (d'autres dispositions des faces sont possibles).



Solution du problème n° 78

De façon générale, ces deux méthodes de calcul ne donnent pas le même résultat.

Supposons par exemple que la classe comporte 15 filles ayant toutes obtenu 16 et 5 garçons ayant tous obtenu 6, la moyenne trouvée par la méthode du professeur est $\frac{16+6}{2}=11$ alors que la méthode correcte de calcul donne $\frac{16\times15+6\times5}{20}=\frac{240+30}{20}=13{,}5$

Remarque (qui ne serait pas probablement pas attendue du candidat) : la méthode serait correcte si les deux groupes d'élèves avaient le même effectif.

Appelons g la somme de toutes les notes des garçons, f la somme de toutes les notes des filles, et n le nombre d'enfants de chacun des deux groupes, la moyenne (calculée selon la méthode ordinaire) est égale à $\frac{f+g}{2n}$.

La moyenne calculée par le professeur est $\frac{\frac{f}{n}+\frac{g}{n}}{2}=\frac{\frac{f+g}{n}}{2}=\frac{f+g}{2n}$.

Dans le cas particulier où les deux groupes ont le même effectif, les deux modes de calcul conduisent bien au même résultat.

Solution du problème n° 79

Du 3 mars à 11h 37 au 31 mars même heure, il s'écoule 28 jours.
Du 31 mars à 11 h 37 au 30 avril même heure, il s'écoule 30 jours.
Du 30 avril à 11 h 37 au 31 mai même heure, il s'écoule 31 jours.
Du 31 mai à 11 h 37 au 30 juin même heure, il s'écoule 30 jours.
Du 30 juin à 11 h 37 au 27 juillet même heure, il s'écoule 27 jours.

Du 27 juillet à 11 h 37 au même jour à 14 h 37, il s'écoule 3 heures.

Du 27 juillet à 14 h 37 au même jour à 15 h 08 il s'écoule 31 minutes.

Au total, la durée est de 146 jours 3 heures et 31 minutes, soit, en secondes :

146 x 24 x 3600 + 3 x 3600 + 31 x 60 = 12 614 400 + 10 800 + 1 860 = 12 627 060

12 627 060 secondes se sont écoulées entre les deux instants indiqués.

Solution du problème n° 80

Le prix d'un même arcticle est de 20% plus élevé dans le magasin A que dans le magasin B.
Le responsable du magasion B décide de d'augmenter le prix de cet article de 14%.
De quel pourcentage le responsable du magasin A doit-il baisser son prix s'il veut qu'après les deux modifications l'article soit vendu au même prix dans les deux magasins ?

Soit p le prix initial dans le magasin B.

Le prix initial dans le magasin A est égal à 1,20 p.

Le prix après modification dans le magasin B est de 1,14 p.

Pour obtenir le même prix, le responsable du magasin A doit multiplier son prix initial par $\frac{1,14}{1,20}$,

en effet $1,20p \times \frac{1,14}{1,20} = 1,14p$

Or $\frac{1,14}{1,20} = 0,95$. le responsable du magasin A doit donc multiplier son prix par 0,95 c'est à dire le diminuer de 5%.