Groupe seconde chance
Feuille d'exercice n° 1

1. On considère un nombre de deux chiffres, ne se terminant pas par zéro.

On calcule la somme de ce nombre et du nombre obtenu en inversant l'ordre de ses chiffres.
Combien de sommes différentes peut-on obtenir ?

2. ABCD est un quadrilatère ayant les propriétés suivantes :

AB = BC ; BD = 6 cm ; AC = 7 cm ; DC = 3 cm ; (AD) est perpendiculaire à (DC).
Ecrire un programme de construction de ABCD utilisant uniquement la règle graduée et le compas, et réaliser effectivement la construction.
Si plusieurs solutions sont possibles, elles devront toutes apparaître sur votre figure.
Aucune justification n'est demandée.

3. ABCD est un rectangle.

M est le milieu de [AD], N le milieu de [AB], et R celui de [DC].
[BD] et [NC] se coupent en S.
On admet que ANRD et BNRC sont des rectangles
Comparer les aires des triangles DNS et BSC.
Comparer les aires des quadrilatères MNBD et MNRD.
Comparer la somme des aires des quadrilatères MNCD et MNBD à l'aire de ABCD.
Exprimer l'aire de DSC en fonction de celle de ABCD.

4. La propriété suivante pourra être admise sans démonstration et utilisée dans l'exercice.

Si la décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier N est $A^a\ B^b\ C^c\ D^d\ E^e$…
alors le nombre de diviseurs de N est égal à : (a+1) (b+1) (c+1) (d+1)(e+1)…

- Combien le nombre « mille milliards » a-t-il de diviseurs ?
- Quels sont les multiples de 6 ayant 10 diviseurs ?
- Quels sont les multiples de 5 ayant 7 diviseurs ?
- Quel est le plus petit entier ayant 30 diviseurs ?

5. O, A et B sont trois points non alignés.

Soit C le symétrique de O par rapport à A, D le symétrique de O par rapport à B.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en R.
On appelle S le milieu de [RC], et T le milieu de [RD]
Quelle est la nature du quadrilatère ABTS ? Justifiez votre réponse.

6. Alix, Béatrice, Chloé et David comparent leurs collections de billes.

Chloé : Si je donnais 3 billes à Béatrice, nous en aurions autant.
Alix : J'ai deux fois plus de billes que Béatrice.
David : Si je mets mes billes avec celles de Chloé, ça nous en fera autant qu'Alix.
Béatrice : A nous quatre, nous avons cent billes.
Combien de billes possède chaque enfant ?

7. Le prix de la tonne de matière grise varie énormément. La semaine dernière, son cours était de 24 000 €. Depuis, on a assisté à une augmentation de 25%, suivie d'une diminution dont j'ai oublié le pourcentage, et enfin d'une nouvelle augmentation de 25 %.
Curieusement, après ces trois changements, le prix de la tonne de matière grise est à nouveau de 24000€. Calculer le pourcentage de la diminution.

Correction des exercices de la séance 1

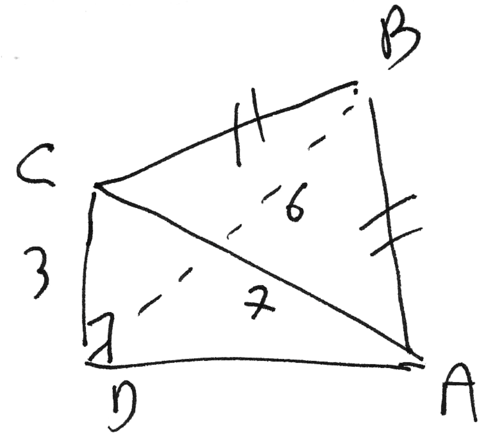
1. Soit a le chiffre des dizaines du nombre choisi, b son chiffre des unités.

a et b sont des entiers compris entre un et neuf (inclus).

La somme calculée est égale à 10 a + b + 10 b + a c'est à dire 11 (a + b)
Il y a donc autant de sommes possibles que de valeur possibles de a+b.
A+b peut valoir de 2 (si a = b = 1) à 18 (si a = b = 9) en prenant toutes les valeurs intermédiaires, on peut donc obtenir 17 sommes différentes.

---

2. *Avant de rédiger ou de tracer aux instruments, il est indispensable de faire un dessin à main levée afin d'analyser la figure demandée.*



On constate que les informations dont on dispose suffisent pour tracer le triangle ACD, mais pas ABC.
On a deux informations sur le point B : il est à 6 cm de D et il est équidistant de A et C.
Chacune de ses informations peut se traduire géométriquement :
B est sur le cercle de centre D et de rayon 6 cm.
B est sur la médiatrice de [AC].
On obtient deux figures non superposables en utilisant par exemple le programme ci dessous.

Un programme de construction de cette figure :
Tracer à la règle graduée un segment [CE] de longueur 6 cm, et son milieu D.
Tracer un arc de cercle de centre C et passant par E, et un arc de cercle de centre E passant par C, choisis pour qu'ils aient un point d'intersection.
Tracer la droite passant par D et par le point d'intersection des deux arcs de cercle.
Placer au compas un point A sur cette droite, à 7 cm de C.
Tracer le cercle de centre A passant par C et le cercle de centre C passant par A. Soient F et G leurs deux points d'intersection, tracer la droite (FG).
Tracer le cercle de centre D et de rayon 6 cm, il coupe (FG) en deux points B1 et B2.
On obtient deux quadrilatères différents répondant au problème : A B1 C D et A B2 C D

3. Les triangles DNC et DBC ont la même aire, car ils ont le côté [DC] en commune, et les hauteurs correspondantes ([NR] et [BC]) de même longueur. Si on leur enlève le triangle DSC, on obtient les triangles DNS et SBC qui ont donc la même aire.

ABD et ANDR ont chacun une aire égale à la moitié de celle de ABCD. Si on leur enlève le triangle AMN, on obtient les quadrilatères MNBD et MNRD qui ont donc la même aire.

M étant le milieu de [AD],les triangles AMN et DMN ont la même aire (si on choisit comme base les côtés [AM] et [MN], les deux triangles ont des bases de même longueur, et la même hauteur). Appelons x cette aire commune, et a l'aire du rectangle ABCD.
MNCD peut se décomposer en deux parties, DNC et DMN ; son aire est donc égale à $a/2 + x$
MNRD s'obtient en enlevant le triangle AMN du rectangle ANRD ; son mesure $a/2 – x$.
La somme des aires de ces deux quadrilatères est donc $a/2 + x + a/2 – x$, c'est à dire a
La somme des aires des deux quadrilatères est égale à l'aire du rectangle ABCD.

Traçons la diagonale [AC], elle coupe [BD] en O, centre du rectangle ABCD.
Dans le triangle ABC, [CN] et [BO] sont des médianes, S est donc le centre de gravité, et on a $BS = \frac{2}{3}$ BO. On en déduit que $BS = \frac{1}{3}$ BD puis que $DS = \frac{2}{3}$ BD
L'aire de DSC est donc égale aux deux tiers de celle de BCD, puisque si on prend comme bases les côtés [DS] et [DB], les deux triangles ont la même hauteur, leurs aires sont donc proportionnelles à leurs bases.
On en déduit que Aire (DSC) = $\frac{1}{3}$ Aire (ABCD).

---

4. Mille milliards est égal à $2^{12} \times 5^{12}$, mille milliards a $13 \times 13 = 169$ diviseurs.

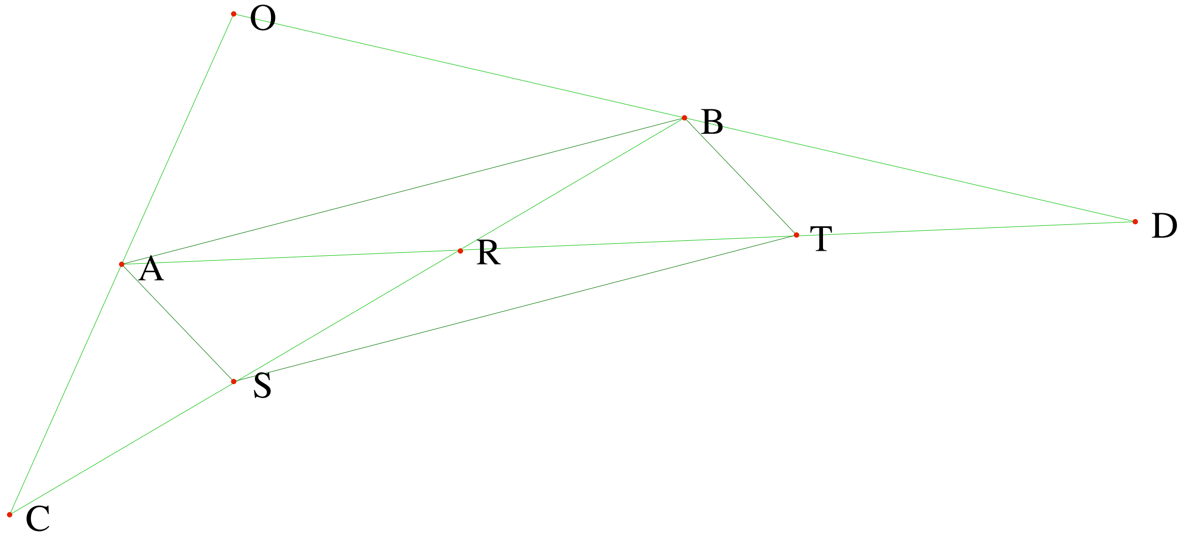
Les multiples de 6 sont divisibles par 2 et par 3, le produit $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)\ldots$ comporte donc au moins deux facteurs.
Pour que le produit soit égal à 10, ces facteurs doivent valoir 2 et 5 (en effet a, b, c… sont des entiers au moins égaux à 1, donc chaque facteur vaut au moins 2).
On a donc $a+1 = 2$ et $b + 1 = 5$ donc $a = 1$ et $b = 4$
Il y a deux nombres qui répondent à ces conditions : $2 \times 3^4 =162$ et $2^4 \times 3 = 48$

le produit $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)\ldots$ ne peut valoir 7 que s'il est réduit à un seul facteur égal à 7. Seul le nombre $5^6 =15625$ répond donc à la question.

On a $30 = (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e+1)\ldots$
Les différentes valeurs des facteurs entre parenthèses sont:
Cas où il n'y a qu'un facteur : $a+1 = 30$, le nombre est alors égal à A^{29}
Cas où il y a deux facteurs : $a+1 = 2$ et $b + 1 = 15$ le nombre est alors égal à $A\,B^{14}$
$a+1 = 3$ et $b + 1 = 10$ le nombre est alors égal à $A^2\,B^9$
$a+1 = 5$ et $b + 1 = 6$ le nombre est alors égal à $A^4\,B^5$
Cas où il y a trois facteurs : $a+1 = 2$, $b + 1 = 3$ et $c + 1 = 5$, le nombre est égal à $A\,B^2\,C^4$

Pour chacun des cas, la plus petite valeur possible est obtenue si on attribue la valeur 2 au facteur premier ayant le plus grand exposant, puis la valeur 3, puis 5
Les candidats au rôle de plus petit entier ayant 30 diviseurs sont donc :
2^{29} 3×2^{14} $3^2 \times 2^9$ $3^4 \times 2^5$ et $\underline{5 \times 3^2 \times 2^4}$

Le plus petit d'entre eux est le nombre souligné qui vaut 720.



5. Dans le triangle COD, [DA] et [CB] sont des médianes, donc R est le centre de gravité.

R est le centre de gravité de COD donc RB = RC / 2.
S est le milieu de [CR] donc SR = RC / 2
RB = RC / 2 et SR = RC / 2 donc RB = RS
RB = RS et R est sur [BS], donc R est le milieu de [BS]

On prouve de la même façon que R est le milieu de [AT].

Les diagonales du quadrilatère ABTS ont le même milieu R, donc c'est un parallélogramme.

---

6. Notons a le nombre de billes d'Alix, b le nombre de billes de Béatrice…
Les quatre informations du texte se traduisent respectivement par :
c = b + 6 a = 2 b a = c + d a + b + c + d = 100.
On en déduit que a + a/2 + a = 100, d'où a = 40.
On a donc 40 = 2b d'où b = 20 ; c = b + 6 = 26 ; 40 = 26 + d donc d = 14.
Alix possède 40 billes, Béatrice en a 20, Chloé 26 et David 14.

---

7. Une augmentation de 25% correspond à une multiplication par 1,25 c'est à dire par $\frac{5}{4}$
La diminution inconnue correspond à une multiplication par un nombre k à déterminer.

On a $24000 \times \frac{5}{4} \times k \times \frac{5}{4} = 24000$ On a donc $\frac{5}{4} \times k \times \frac{5}{4} = 1$ et $k = \frac{16}{25} = \frac{64}{100}$

La diminution, qui correspond à une multiplication par $\frac{64}{100}$, était donc de 36%