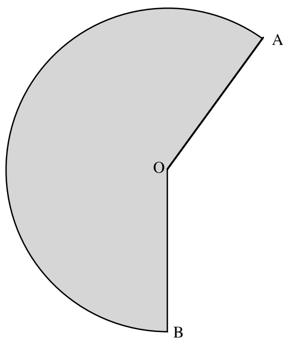
Groupe seconde chance
Feuille d'exercice n° 12

Exercice 1 (D'après CRPE Antilles Guyane 1995)
Monsieur Dupré achète un terrain triangulaire dont les côtés mesurent 120 m, 96 m et 72 m.

1. Quels sont en millimètres les mesures des côtés du triangle t représentant ce terrain à l'échelle $\frac{1}{24000}$?
2. La fraction $\frac{1}{24000}$ exprime-t-elle un nombre décimal ? Justifier.
3. Ce terrain était proposé à 37€ le mètre carré. Monsieur Dupré l'obtient pour 115200 €.
Quel pourcentage de réduction a-t-il obtenu sur le prix proposé ?
4. Sur les bords du terrain, Mr Dupré veut planter des piquets en respectant les conditions suivantes :
    - Les piquets doivent être régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres.
    - Il doit y avoir un piquet à chaque sommet du triangle.

   Quel est le nombre minimal de piquets nécessaires.

Exercice 2



On considère le secteur angulaire représenté ci-dessus en réduction.
Son rayon mesure 10 cm, et son angle 216°.

1. Quelle est la longueur exacte de l'arc AB de ce secteur ?
2. On considère un cercle dont le périmètre a la même longueur que l'arc AB. Calculer la mesure du rayon de ce cercle.
3. On fabrique un cône de révolution dont la surface latérale est réalisée à l'aide du secteur ci dessus, et dont la base est le cercle de la question 2.
   Calculer le volume de ce cône.

Exercice 3
Deux nombres entiers X et Y ont une différence de 47.
Si on écrit X en base 6 et Y en base 5, les deux écritures sont identiques et comportent trois chiffres. Déterminer toutes les valeurs possibles de X et Y (qu'on exprimera en base 10).

Exercice 4
On considère des pavés droits dont le volume mesure 24 cm^3.

1. On se limite dans cette question aux pavés dont les arêtes mesurent un nombre entier de centimètres. Trouver tous les pavés répondant à ces conditions.
2. Calculer l'aire totale des faces de chacun des pavés trouvés à la question 1.
3. En acceptant maintenant des pavés dont les mesures des arêtes en centimètres sont des nombres rationnels, trouver un pavé dont l'aire est inférieure à 52 cm^2

Exercice 5
Un segment [AB] étant donné, construire à la règle non graduée et au compas un pentagone convexe ABCDE tel que :

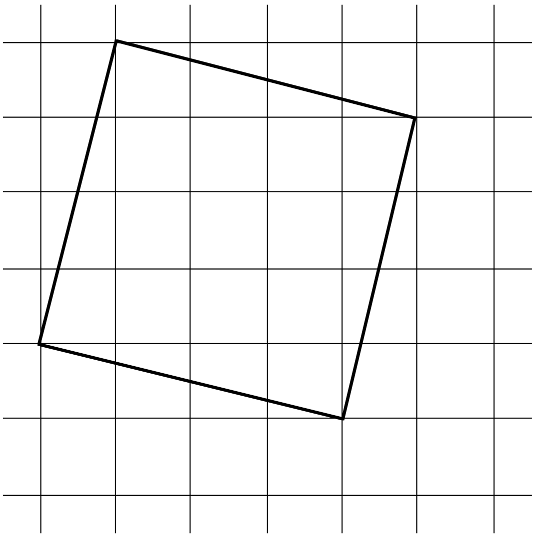
- AB = BC = CD = DE
- Les angles de sommets B et C mesurent 120°
- L'angle de sommet E est droit.

Rédiger un programme de la construction ci-dessus.
Démontrer que le quadrilatère ABDE est un rectangle.

Exercice 6
Dans une période de forte inflation, les prix ont doublé en trois ans.
Les prix ont augmenté de 25% chacune des deux premières années.
Quel a été le pourcentage d'augmentation des prix la troisième année ?

Exercice 7
On ne considère dans cet exercice que des carrés dont les sommets sont situés sur les nœuds d'un quadrillage. On choisit comme unité de longueur le côté d'un carreau du quadrillage, et comme unité d'aire la surface d'un de ces carreaux.

Calculer l'aire du carré ci-dessous :



Pour chacun des nombres suivants : 2, 10, 19, 29, est-il possible de construire un carré dont l'aire a pour mesure ce nombre.
Quand la construction est possible, effectuez-la.
Dans les cas où elle est impossible, justifiez.

Exercice 8
Ecrivez en base 10 le plus grand nombre entier qui s'écrit en base 4 avec des chiffres tous différents.

Exercice 9
Parmi les nombres entiers compris entre 100 et 200, quels sont ceux qui ont à la fois pour reste 4 dans la division par 5, et pour reste 3 dans la division par 7.

Correction des exercices de la fiche 12

Exercice 1

1. Les mesures en mm des côtés du terrain sont respectivement 120000, 96000 et 72000.
Les mesures en mm des côtés du triangle t sont obtenues en divisant les précédentes par 24000, elles valent donc 5, 4 et 3.

2. $\frac{1}{24000}$ étant irréductible, toutes les fractions égales à $\frac{1}{24000}$ sont de la forme $\frac{n}{24000\,n}$.
Or la décomposition de 24000 en facteurs premiers comporte un facteur 3, il en est de même de 24000 n, qui ne peut donc pas être une puissance de 10.
$\frac{1}{24000}$ ne pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 n'est donc pas un nombre décimal.

3. Le triangle de côtés 3,4 et 5 est rectangle, il en est donc de même du terrain dont il est une réduction. L'aire du terrain, exprimée en mètres carrés, mesure $\frac{96 \times 72}{2} = 3456\, m^2$.

Au prix de 37€ le mètre carré, ce terrain coûterait 3456 x 37 = 127872€
Le montant de la réduction est donc de 127872 – 115200 = 12672,9
$\frac{12672{,}9}{127872} \approx 0{,}099$. Le pourcentage de réduction est proche de 9,9%.

4. Pour respecter les conditions, l'intervalle entre les piquets doit être un diviseur commun à 72, 96 et 120. Le nombre d'intervalles (donc de piquets) est minimal si on choisit le plus grand intervalle possible, donc le pgcd des trois nombres.
Or $72 = 2^3 \times 3^2$; $96 = 2^5 \times 3$; $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, leur pgcd est $2^3 \times 3 = 24$
L'intervalle étant de 24 m et le périmètre de 288 m, il y aura 12 intervalles donc également 12 piquets.

Exercice 2

1. La longueur de l'arc est proportionnelle à l'angle au centre, or pour un angle de 360° elle est égale au périmètre du cercle, c'est à dire 20π.

Pour un angle de 216°, la longueur de l'arc est donc égale à $20\pi \times \frac{216}{360} = 12\pi\ cm$

2. Le cercle qui a pour périmètre 12π cm a pour rayon 12π / 2π = 6 cm.
3. On considère un triangle dont un côté est la hauteur du cône, et un deuxième côté un rayon du cercle de base. Ce triangle est rectangle, et son hypoténuse est un rayon du secteur utilisé pour réaliser la surface latérale.
Si on note h la mesure de la hauteur, on a alors :
$h^2 + 6^2 = 10^2$
$h^2 + 36 = 100$
$h^2 = 64$
$h = 8$
Le volume du cône, exprimé en centimètres cubes, est alors : $\frac{\pi \times 6^2 \times 8}{3} = 96\pi$

Exercice 3

Appelons a b et c les chiffres qui servent à écrire X en base 6 et Y en base 5.
$X = 36a + 6b + c$, et $Y = 25a + 5b + c$.
X est plus grand que Y et leur différence est $X-Y = 11a + b = 47$
Cette équation a plusieurs solutions en nombres entiers positifs ou nuls :
($a= 0$; $b = 47$) ; ($a= 1$; $b = 36$) ; ($a= 2$; $b = 25$) ; ($a= 3$; $b = 14$) et ($a= 4$; $b = 3$).
Seule la dernière solution convient pour notre problème car b étant la valeur d'un chiffre en base 5 ne peut pas excéder 4.
On a donc $a = 4$, $b = 3$ et c peut prendre toutes les valeurs acceptables à la fois en base 5 et en base 6, c'est à dire 0, 1, 2, 3 ou 4.
Les valeurs possibles pour X et Y sont donc les suivantes :
Pour $c = 0$, $X = 3 \times 36 + 4 \times 6 + 0 = 132$, alors $Y = 3 \times 25 + 4 \times 5 + 0 = 85$
Pour $c = 1$, on obtient de même $X = 133$ et $Y = 86$
Pour $c = 2$, $X = 134$ et $Y = 87$
Pour $c = 3$, $X = 135$ et $Y = 88$
Pour $c = 4$, $X = 136$ et $Y = 89$

Exercice 4

1. Cherchons toutes les façons de décomposer 24 en un produit de trois entiers positifs. Chaque décomposition correspond à un pavé, les trois nombres étant les trois dimensions du pavé.
   $1 \times 1 \times 24$
   $1 \times 2 \times 12$
   $1 \times 3 \times 8$
   $1 \times 4 \times 6$
   $2 \times 2 \times 6$
   $2 \times 3 \times 4$

2. L'aire totale des faces d'un pavé de dimensions a b et c est $2ab + 2bc + 2ac$.
   On trouve ainsi les aires suivantes (exprimées en centimètres carrés) :
   Le pavé $1 \times 1 \times 24$ a une aire de 98
   Le pavé $1 \times 2 \times 12$ a une aire de 76
   Le pavé $1 \times 3 \times 8$ a une aire de 70
   Le pavé $1 \times 4 \times 6$ a une aire de 68
   Le pavé $2 \times 2 \times 6$ a une aire de 56
   Le pavé $2 \times 3 \times 4$ a une aire de 52

3. La question précédente suggère que plus les dimensions sont proches les unes des autres, plus l'aire du pavé est petit. On peut mette à l'épreuve cette conjecture en choisissant trois nombres voisins dont le produit est 24.
   On peut choisir par exemple 2,5 3 et 3,2.
   On constate que pour ce pavé l'aire totale des faces est égale à :
   $2(2{,}5 \times 3) + 2(3 \times 3{,}2) + 2(2{,}5 \times 3{,}2) = 50{,}2 \text{ cm}^2$

Exercice 5

Programme de construction :
Construire successivement les triangles ABO, BCO, CDO et DEO de telle sorte qu'ils soient tous équilatéraux et distincts. Tracer le pentagone ABCDE.

Par construction, l'angle AOD mesure $3 \times 60 = 180°$, donc A,O et D sont alignés.

De plus OA = OD donc O est le milieu de [AD], et AD = AO + OD = 2AB
On montre de la même façon que O est le milieu de [BE] et que BE = BO + OE = 2AB

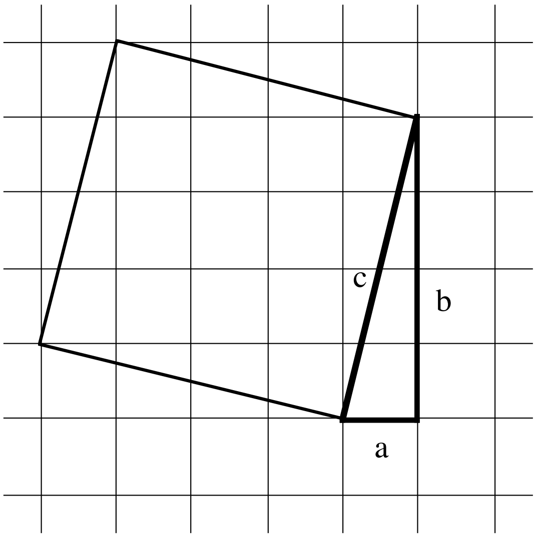
Le quadrilatère ABDE a des diagonales qui se coupent en leur milieu et ont la même longueur, c'est donc un rectangle.

Exercice 6

Une augmentation de 25 % correspond à une multiplication par $\frac{125}{100} = \frac{5}{4}$.
Pour que les prix soient doublés en trois ans, ils doivent être multipliés la troisième année par un nombre k tel que $\frac{5}{4} \times \frac{5}{4} \times k = 2$ d'où on tire $k = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{32}{25} = \frac{128}{100}$
L'augmentation des pris la troisième année a donc été de 28%.

Exercice 7

Si on note c la mesure du côté du carré, l'aire du carré est égale à c^2, ce qui, en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle tracé en gras sur la figure est égal à 17.
Les nombres proposés ne sont pas des carrés d'entiers, le côté du carré ne peut donc pas être un entier, il ne sera pas tracé sur une ligne du quadrilage. C'est donc l'hypoténuse d'un triangle rectangle analogue à celui de la figure ci-contre.



On obtient une aire de 2 pour a = b = 1, une aire de 10 pour a = 3 et b = 1, une aire de 29 pour a = 5 et b = 2.
En revanche, il n'est pas possible d'obtenir une aire de 19 car 19 n'est pas la somme de 2 carrés parfaits : 16 + 4 est trop grand, 16 + 1 est trop petit, et si on n'utilise pas 16, la plus grande valeur possible est 9 + 9 = 18.

Exercice 8

Le nombre cherché s'écrit $\overline{3210}\,3210$ en base 4.
Il vaut donc 3 x 64 + 2 x 16 + 1 x 4 = 228

Exercice 9

7 x 14 + 3 = 101.
Les nombres suivants qui ont pour reste 3 dans la division par 7 sont : 108, 115, 122, 129
129 est le premier des nombres qui conviennent, car si le reste est 4 dans la division par 5 alors le chiffre des unités est 4 ou 9.
Deux nombres ont le même reste dans la division par 5 si et seulement si leur différence est multiple de 5.
Deux nombres ont le même reste dans la division par 7 si et seulement si leur différence est multiple de 7.
Deux nombres ont donc le même reste dans les deux divisions si et seulement si leur différence est multiple à la fois de 5 et de 7, c'est à dire si elle est multiple de 35.
Les autres nombres qui conviennent sont donc 129 + 35 = 164 et 164 + 35 = 199.