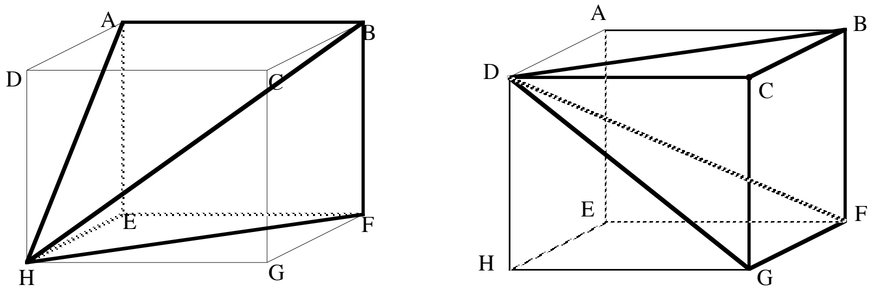
Groupe seconde chance
Feuille d'exercice n° 2
(Exercices adaptés du CRPE 2001)

1. Un nombre de trois chiffres est tel que :
La différence entre ce nombre écrit à l'endroit et le nombre écrit à l'envers est 594
La somme des trois chiffres est 16
La somme du double du chiffre des unités et du quadruple du chiffre des dizaines est 22.
Trouver ce nombre.

2. ABCD est un pavé droit.
- Expliquez pourquoi les pyramides ABFEH et BCGFD ont le même volume.
- Dessinez en vraie grandeur un patron de la pyramide ABFEH dans le cas où les dimensions du pavé sont les suivantes : AB = 5 cm ; BC = 3 cm ; BF = 4 cm.



3. On considère un cercle dont on ne connaît pas le centre.
Décrire une méthode permettant de construire le centre du cercle en utilisant uniquement une équerre non graduée. Justifier que le point obtenu par la méthode décrite est bien le centre.

4. 26562 et 393 sont des palindromes, cela signifie qu'en les lisant de gauche à droite ou de droite à gauche on a le même nombre.
Trouver tous les palindromes de 5 chiffres divisibles à la fois par 9 et par 5

5. Les habitants, de l'Ile aux Rêves se répartissent en deux groupes: les diurnes et les nocturnes. A l'état d'éveil les diurnes ne se trompent jamais et leurs jugements sont toujours exacts; par contre ils se trompent systématiquement dans leurs rêves et lorsqu'ils sont endormis tout ce qu'ils croient vrai est faux. Pour les nocturnes c'est exactement le contraire, ils rêvent juste et se trompent quand ils sont éveillés.

En ce moment un des habitants de 1'lle aux Rêves croit être diurne. Pouvez-vous dire s'il a raison, s'il est réveillé, ou s'il dort ?
Un autre croit qu'il dort. Peut-on dire s'il a, raison, et s'il est diurne ou nocturne?
(D'après Raymond Smullyan, le livre qui rend fou, édition Dunod)

6. ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que AD = AB + CD
E est le point de [AD] tel que AE = CD. On pose AB = a , CD = b et BE = c.
- Démontrer que l'angle BEC est droit.
- Calculer de deux manières différentes l'aire du trapèze ABCD en fonction de a, b, ou c.
- Retrouver ainsi une démonstration du théorème de Pythagore.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, Centre de Nantes.

Corrigé des exercices de la feuille 2

1. Soit c le chiffre des centaines du nombre cherché, d le chiffre des dizaines, et u celui des unités.
La somme du double du chiffre des unités et du quadruple du chiffre des dizaines est 22, on a donc
u =(22 – 4 d) / 2 de plus, c = 16 – (u + d)
on peut donc calculer u et c en fonction de d, ce qui donne les possibilités suivantes :

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u		9	7	5	3	1				
c		6	7	8	9					

Les valeurs négatives ou plus grandes que 9 ne convenant pas, elles n'ont pas été reportées dans le tableau.

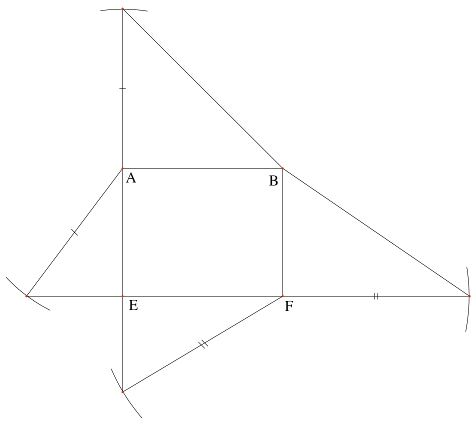
Seuls 4 nombres sont donc susceptibles de répondre au problème : 619, 727, 835 et 943
On constate que 943 - 349 = 594, mais que pour les autres nombres la différence avec le nombre écrit à l'envers ne convient pas. Le problème a donc une unique solution : 943.

---

2. Les deux pyramides ont le même volume parce que le volume de chacune d'entre elles est égal au tiers du volume du pavé droit.

La droite (BA) est perpendiculaire au plan AEH, elle est donc perpendiculaire à toute les droites de ce plan qui la coupent. En particulier, elle est perpendiculaire à (AH)

Ceci prouve que le triangle ABH est rectangle en A.
Il en est de même pour le rectangle BFH, rectangle en F, ce qui permet de réaliser le patron dont une réduction figure ci-contre.



---

3. On place deux points A et B sur le cercle puis, à l'aide de l'équerre, on trace la perpendiculaire à [AB] passant par B. Cette perpendiculaire coupe le cercle en C.

Le triangle ABC étant rectangle en B, le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypothénuse [AC], par conséquent [AC] est un diamètre.
Il suffit de tracer par la même méthode un autre diamètre du cercle pour obtenir le centre qui est l'intersection des deux diamètres.

---

4. Pour que le nombre soit divisible par 5, il faut que le dernier chiffre soit 5 ou 0, mais comme le premier chiffre est égal au dernier, seule la valeur 5 convient.

Le nombre est donc de la forme $\overline{5aba5}$
Pour que le nombre soit divisible par 9, il faut que la somme de ses chiffres soit multiple de 9.

La somme des trois chiffres centraux doit donc être 8, 17 ou 26 ce qui donne 18, 27 ou 36 comme somme des 5 chiffres. On obtient alors les solutions suivantes :
50805 51615 52425 53235 54045 (Somme des chiffres égale à 18).
54945 55755 56565 57375 58185 (Somme des chiffres égale à 27).
59895 (Somme des chiffres égale à 36).

---

5. Des tableaux à double entrée permettent de s'y retrouver.

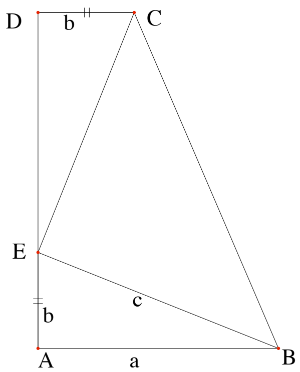
Dans chaque tableau, les affirmations en abscisse et en ordonnée représentent la réalité, les affirmations à l'intérieur du tableau représentent ce que pensent les habitants.

	Il est réveillé	Il dort
Il est diurne	Il pense être diurne	Il pense être nocturne
Il est nocturne	Il pense être diurne	Il pense être nocturne

On déduit de ce tableau qu'un habitant qui pense être diurne est réveillé, mais on ignore sa catégorie.

	Il est réveillé	Il dort
Il est diurne	Il pense être réveillé	Il pense être réveillé
Il est nocturne	Il pense dormir	Il pense dormir

On déduit de ce tableau qu'un habitant qui croit dormir est nocturne, mais on ne saurait dire s'il est réveillé.



E est sur le segment [AD], donc DE = DA – EA = a + b – b = a.
Les triangles CDE et ABE sont des triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont égaux, ils sont donc isométriques.
Les angles $\widehat{DEC}$ et $\widehat{AEB}$ ont donc une somme de 90°.
On obtient $\widehat{BEC}$ en soustrayant $\widehat{DEC}$ et $\widehat{AEB}$ de $\widehat{DEA}$ qui est plat,
donc $\widehat{BEC}$ = 90°, et le triangle BEC est rectangle en c.

L'aire de ABCD est égale à la somme des aires des triangles ABE, BCE, et DEC.
L'aire de ABCD mesure donc : $ab/2 + c^2/2 + ab/2$, soit $ab + c^2/2$

On peut aussi calculer l'aire de ABCD en utilisant la formule qui donne l'aire d'un trapèze
L'aire de ABCD mesure donc : $(a+b)(a+b)/2$

En rapprochant les deux résultats, on obtient que $ab + c^2/2 = (a+b)(a+b)/2$
On en déduit les égalités suivantes :

$$2\,ab + c^2 = (a+b)(a+b)$$
$$2\,ab + c^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Considérons un triangle ABE, rectangle en A. Il est possible à partir de ce triangle de construire le trapèze décrit dans ce problème, l'égalité ci-dessus montre qu'on a alors $EB^2 = AB^2 + AE^2$ ce qui est une démonstration du théorème de Pythagore.