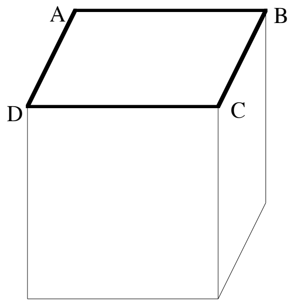
Groupe seconde chance
Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1
Dans l'exercice qui suit, ABCD est une face d'un cube dessiné en perspective cavalière.
Pour des raisons de gain de place, et parce que les tracés nécessaires au problème se situent tous sur cette face, Il n'est pas nécessaire de dessiner les autres faces du cube.
ABCD est donc représenté sur votre dessin par un parallélogramme, mais n'oubliez pas qu'il s'agit en réalité d'un carré vu en perspective.

On parle de ceci :



On dessine seulement ceci :

Rappel de deux propriétés du dessin en perspective cavalière :

- Deux droites parallèles de l'espace sont représentées par deux parallèles sur le dessin en perspective.
- Deux droites perpendiculaires de l'espace ne sont pas nécessairement représentées par des perpendiculaires sur le dessin en perspective.

Dessinez le carré ABCD vu en perspective.
E est un point de [AB] et F un point de [CD] tels que (EF) ne soit pas parallèle à (AD).
On appelle G l'intersection de (AC) et (EF). P est un point quelconque à l'intérieur du carré ABCD.

1. Tracer la parallèle à (AD) passant par G puis démontrer que cette droite est perpendiculaire à (AB)(rappel : elle n'est pas perpendiculaire à (AB) sur votre dessin, mais elle l'est sur le cube).

2. Par une méthode analogue à celle de la question 1, tracer la perpendiculaire à (AC) passant par E.

3. Les deux droites tracées aux questions précédentes se coupent en H. En se plaçant dans le triangle AGE, démontrer que (AH) est perpendiculaire à (GE).

4. Construire la perpendiculaire à (EF) passant par P.

Exercice 2 (Rennes 2002)
On veut calculer une valeur approchée au dixième près par défaut du quotient de 129 par 17 en utilisant une calculatrice dont la seule touche d'opération disponible est celle de la soustraction.
Proposer une démarche.

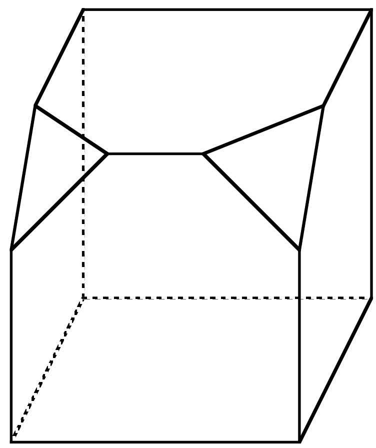
Exercice 3 (d'après La Réunion 2002)

Paul a dans sa tirelire 13 pièces de monnaie pour une valeur totale de 5 €. Il n'a que des pièces de 50 centimes et de 20 centimes. Déterminer le nombre de pièces de chaque sorte.

Donner trois méthodes de résolution de ce problème, dont deux au moins soient utilisables par des élèves de fin de cycle 3

Exercice 4

On considère un polyèdre quelconque.
On appelle S le nombre de ses sommets, F le nombre de ses faces et A le nombre de ses arêtes.



1. Donner les valeurs de S, F et A pour les polyèdres suivants :
   - Un cube
   - Une pyramide à base carrée
   - Le polyèdre dessiné ci-contre
   - Un cube dont on aurait coupé tous les coins de la même manière qu'on en a coupé deux pour obtenir le solide précédent.
2. Les résultats précédents permettent-ils d'affirmer que pour tout polyèdre on a $S + F = A + 2$?
3. Sachant que pour obtenir le troisième et le quatrième solide de la question 1, les sommets des triangles sont situés au tiers de la longueur de chaque arête, dessinez sur papier quadrillé, en perspective cavalière le quatrième solide. (il est conseillé de prendre une page entière).
4. Les faces octogonales de ce solide sont elles des octogones réguliers ? Justifier votre réponse.
5. On suppose que les arêtes du cube de départ mesuraient 6 cm, calculer le volume et l'aire du cube tronqué.

Exercice 5 (D'après Aix-Marseille 2002)
Montrer sans poser la division que 72 036 540 est divisible par 18.

Exercice 6 (Les réponses devront être justifiées)
Est-il vrai que la somme de 5 entiers consécutifs est toujours divisible par 5 ?
Est-il vrai que le produit de 5 entiers consécutifs est toujours divisible par 5 ?

Exercice 7 (Les réponses devront être justifiées)
Quelle est la plus grande valeur possible du produit de deux entiers naturels dont la somme est 5 ?
Quelle est la plus grande valeur possible du produit de deux entiers naturels dont la somme est 25 ?
Quelle est la plus grande valeur possible du produit de deux entiers naturels dont la somme est 625 ?

Exercice 8
On considère une droite d et un point A n'appartenant pas à d.
Le texte encadré ci-dessous est un programme de construction d'une droite parallèle à d passant par A.
Appliquer le programme et démontrer qu'il est correct, c'est à dire que la droite obtenue est parallèle à d.

Tracer un cercle de centre A, qui coupe la droite d en deux points R et S. La droite (AS) coupe le cercle en S et en un autre point appelé T Tracer les cercles de centres R et T et qui passent par A. Soit B leur autre point d'intersection. (AB) est la droite demandée.

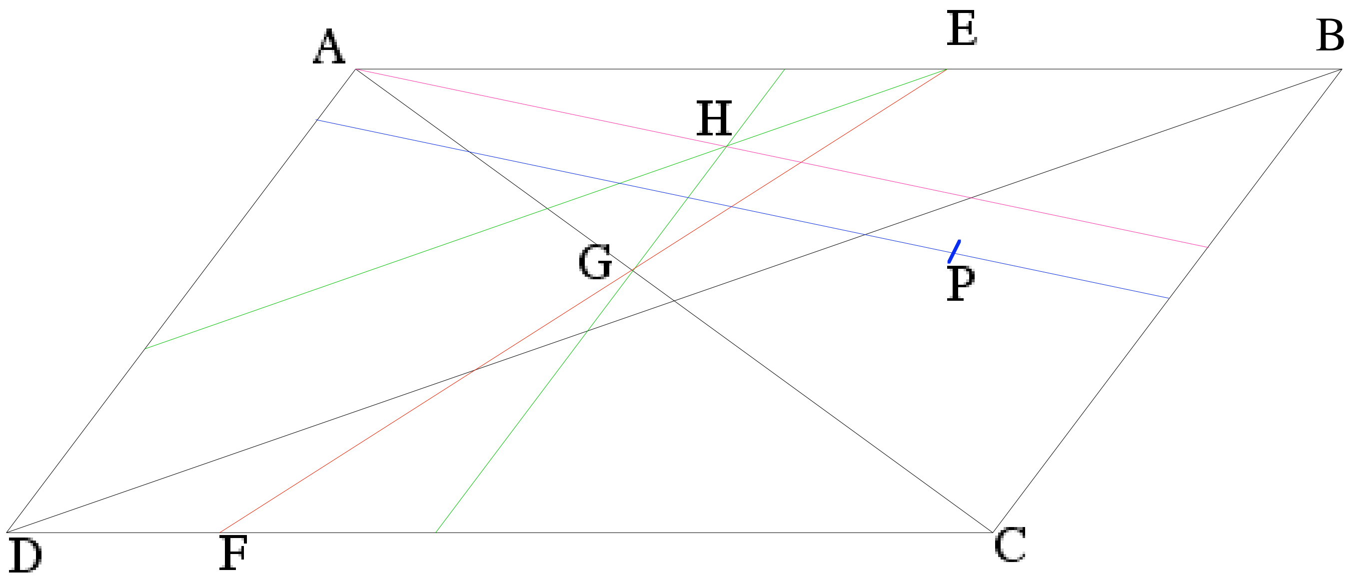
Corrigé de la feuille d'exercices numéro 3

Exercice 1
Des parallèles sont représentées sur le dessin en perspective par des parallèles, on trace donc la parallèle demandée par une technique usuelle utilisant l'équerre ou le compas.
ABCD étant une face d'un cube, c'est un carré, par conséquent (AB) et (AD) sont perpendiculaires.
La droite (AD), qui est perpendiculaire à (AB) est donc également perpendiculaire à la parallèle à (AB) que l'on vient de tracer.

Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, par conséquent, pour tracer la perpendiculaire à (AC) passant par E, il suffit de tracer la parallèle à (BD) passant par E. On remarque qu'elle n'est pas perpendiculaire à (AC) sur la représentation en perspective.

Dans le triangle AGE, les droites (EH) et (GH) sont des hauteurs, par conséquent leur point d'intersection H est l'orthocentre.
La droite (AH) qui passe par le sommet A et par l'orthocentre est donc la hauteur relative à [GE], par conséquent (AH) est perpendiculaire à (GE).

Pour construire la perpendiculaire à (EF) passant par P, il suffit de construire la parallèle à (AH) passant par P.



Exercice 2
On peut soustraire 17 de 129 jusqu'à ce que le résultat soit inférieur à 17, en comptant au fur et à mesure le nombre d'itérations.
On en conclut que 129 – (7 x 17) = 10 autrement dit 129 = 7 x 17 + 10
A cette étape on a déterminé le quotient entier qui est 7, et le reste qui est 10.
Pour déterminer le chiffre des dixièmes, on soustrait 1,7 (c'est à dire 0,1 x 17) de 10 autant de fois que nécessaire, jusqu'à ce que le résultat obtenu soit inférieur à 1,7 en comptant à nouveau le nombre d'itérations.
On observe que 10 – 5 x 1,7 = 1,5 on en conclut que 5 x 1,7 < 10 < 6 x 1,7
Ou encore que 0,5 x 17 < 10 < 0,6 x 17

En rapprochant ce résultat de celui de la première étape, on conclut que
7,5 x 17 < 129 < 7,6 x 17
Le quotient au dixième près par défaut de 129 par 17 est donc égal à 7,5.

Exercice 3

Méthode experte :

Appelons x le nombre de pièces de 50 centimes, y le nombre de pièces de 20 centimes.
Le nombre total de pièces est 13, on a donc $x + y = 13$
La somme totale est 5 €, soit 500 centimes, on a donc $50x + 20y = 500$, ou $5x + 2y = 50$.

Il faut donc résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} x+y=13 \\ 5x+2y+50 \end{cases}$

De $x + y = 13$ on déduit que $y = 13 – x$ Dans la deuxième équation, on peut donc remplacer y par $13 – x$.
On obtient $5x + 2(13 – x) = 50$
$5x + 26 – 2x = 50$
$3x = 24$
$x = 8$
Donc $y = 13 – 8 = 5$
Paul a donc 8 pièces de 50 centimes et 5 pièces de 20 centimes.

Deuxième méthode : relevé systématique dans un tableau de toutes les possibilités

Nombre de pièces de 50	0	1	2	3	4	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13
Nombre de pièces de 20	13	12	11	10	9	8	7	6	**5**	4	3	2	1	0
Somme totale en centimes	260	290	320	350	380	410	440	470	**500**	530	560	590	620	650

Troisième méthode : essais

Il y a moins de 10 pièces de 50 centimes, car 10 pièces de 50 centimes valent à elles seules 5 €
Essayons avec 6 pièces de 50 centimes. La somme totale est alors $6 \times 50 + 7 \times 20 = 440$ centimes, ce n'est pas assez, essayons en augmentant le nombre de pièces de 50 centimes….

Quatrième méthode :

S'il n'y avait que des pièces de 50 centimes, la somme totale serait de 650 centimes, c'est à dire 150 centimes de trop.
A chaque fois que l'on remplace une pièce de 50 centimes par une de 20, la somme totale diminue de 30 centimes. Comme $150 = 5 \times 30$, il faut donc effectuer 5 remplacements pour parvenir à une somme de 500 centimes. Il y a donc 8 pièces de 50 centimes, et 5 de 20.

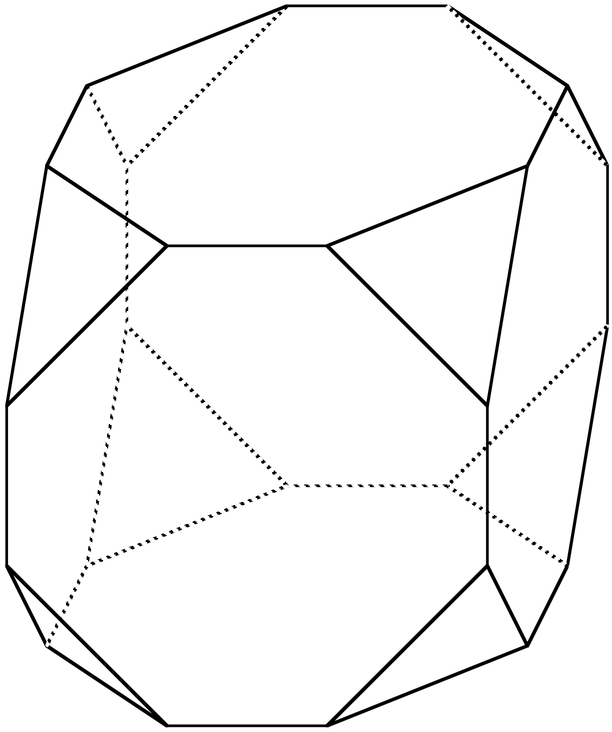
Cinquième méthode, s'appuyant sur les propriété arithmétiques des nombres en jeu.
La somme en pièces de 20 centimes est égale à 500 moins un multiple de 50, c'est donc un multiple de 50
Comme elle est aussi multiple de 20, cette somme est un multiple commun à 50 et 20. Le ppmc de 50 et 20 étant 100, la somme en pièces de 20 centimes est un multiple de 100.
Le nombre de pièces de 20 centimes est donc un multiple de 5, ce qui laisse seulement trois valeurs à tester : 0, 5 et 10.

Les méthodes 2 3 et 4 sont envisageables pour un élève de fin de cycle 3.

Exercice 4

Pour un cube on a S = 8 ; F = 6 et A = 12
Pour une pyramide à base carrée, S = 5, F = 5 et A = 8
Pour le polyèdre dessiné, S = 12 ; F = 8 et A = 18.
Pour le cube tronqué huit fois, on a :
S = 24 (il y a trois sommets autour de chaque sommet du cube)
F = 14 (toutes les faces du cube tronquées, plus les huit triangles)
A= 36 (toutes les arêtes du cube, plus trois pour chaque triangle)

L'égalité $S + F = A + 2$ est vérifiée pour chacun des polyèdres pris comme exemples, mais cela ne prouve absolument pas qu'elle est vraie pour les autres polyèdres.

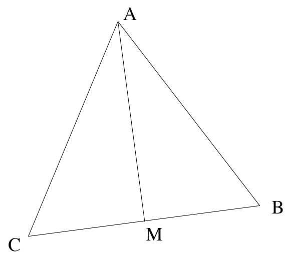


Soit a la longueur d'une arête du cube, les arêtes qui ne sont pas des cotés de triangles mesurent a/ 3.
Les arêtes qui sont des côtés de triangles sont, si on les imagine tracées sur le cube, les hypoténuses de triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent a/3, leur longueur est supérieure à a/3.
Les octogones ne sont donc pas réguliers (bien que leurs angles soient tous égaux à 135°).

Le volume du solide s'obtient en soustrayant le volume des 8 pyramides de celui du cube.

Le volume du solide est donc : $6\times6\times6-8\times\left(\dfrac{\frac{2\times2}{2}\times2}{3}\right)=216-\dfrac{32}{3}=\dfrac{616}{3}\approx 205cm^3$

L'aire de chaque face octogonale est égale à 36 – 4 x 2 = 28 cm^2
Les côtés des triangles équilatéraux mesurent $2\sqrt{2}\ cm$ (car ce sont aussi les hypoténuses de triangles rectangles isocèles dont les côtés de l'angle droit mesurent 2 cm).



Appelons ABC un des triangles équilatéraux, et M le milieu de [BC].
ABM est un triangle rectangle en M avec AB = $2\sqrt{2}$ et BM = $\sqrt{2}$
Le théorème de Pythagore permet alors d'affirmer que
AM^2 = $\left(2\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{2}^2=8-2=6$, on a donc AM = $\sqrt{6}$
L'aire du triangle ABC est égale à (BC x AM) / 2, soit $\sqrt{12}$ ou $2\sqrt{3}$ cm^2

L'aire du polyèdre, composé de 6 octogones et 8 triangles, est donc égale à 6 x 28 + 8 x $2\sqrt{3}$
Soit 168 + 16 $\sqrt{3}$ cm^2 en valeur exacte, c'est à dire environ 196 cm^2

Exercice 5
72 000 000 est un multiple de 18 puisque 72 en est un
il en est de même pour 36 000 et pour 540.
La somme de trois multiples de 18 est multiple de 18.

Autre méthode : 72 036 540 est divisible par 9 puisque la somme de ses chiffres est 27, et par 2 puisqu'il se termine par un 0. Par conséquent, sa décomposition en facteurs premiers comprend 3^2 et 2, c'est donc un multiple de 18.

Exercice 6.

Appelons n le troisième des cinq entiers consécutifs.
Alors la somme s'écrit $(n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) = 5n$
Cette somme est par conséquent divisible par 5

Appelons p le plus petit des cinq entiers consécutifs, et étudions tous les cas possibles suivant le reste r de la divisions euclidienne de p par 5

Si r = 0, alors p est un multiple de 5
Si r = 1, alors p + 4 est un multiple de 5
Si r = 2, alors p + 3 est un multiple de 5
Si r = 3, alors p + 2 est un multiple de 5
Si r = 4, alors p + 1 est un multiple de 5
Dans tous les cas, l'un des nombres du produit est multiple de 5, donc le produit l'est aussi.

Exercice 7

Si la somme de deux entiers naturels est 5, on peut obtenir les produits suivants :
0 x 5 = 0 1 x 4 = 4 2 x 3 = 6 Le plus grand produit possible est 6

Si la somme de deux entiers naturels est 25, on peut obtenir les produits suivants :
0 x 25 = 0 1 x 24 = 24 2 x 23 = 46 3 x 22 = 66 4 x 21 = 84 5 x 20 = 100 6 x 19 = 114
7 x 18 = 126 8 x 17 = 136 9 x 16 = 144 10 x 15 = 150 11 x 14 = 154 et 12 x 13 = 156.
Le plus grand produit possible est 156

On peut supposer que pour 625, le plus grand produit sera encore obtenu quand les deux nombres sont proches de la moitié de la somme, c'est à dire pour 312 et 313
On a 312 x 313 = 97656
Si on choisit d'autres nombres, l'un des deux sera supérieur à 313, notons le 313 + h (ou h est un entier strictement positif)
L'autre nombre est alors égal à 312 – h
Le produit des deux nombres est alors $(313 + h)(312 - h) = 97656 - 313h + 312h - h^2 = 97656 - h - h^2$ ce qui est plus petit que 97656. La plus grande valeur possible est donc bien 97656.

Exercice 8

Par construction, le côté [ST] du triangle RST est un diamètre du cercle de centre A, de plus le point R est sur ce cercle, donc (RT) est perpendiculaire à (RS), c'est à dire à la droite d.

Par construction, le quadrilatère ARBT a tous ses côtés égaux, c'est donc un losange.
ARBT est un losange, donc ses diagonales (AB) et (RT) sont perpendiculaires.

Les droites d et (AB) sont toutes deux perpendiculaires à (RT), donc elles sont parallèles entre elles.
La droite (AB) qui passe par A et est parallèle à d est donc la droite demandée.