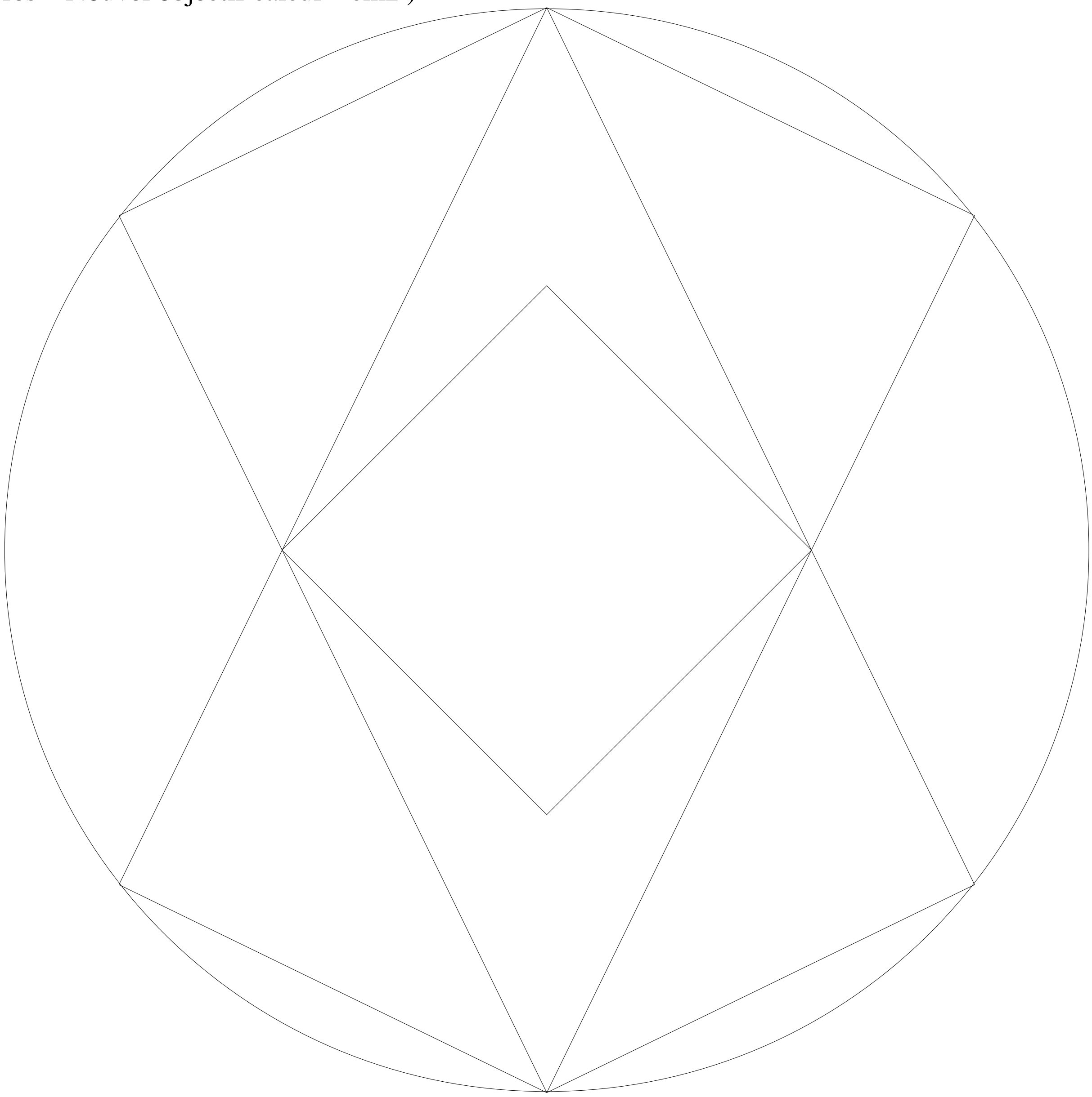
Groupe seconde chance
Feuille d'exercices numéro 4

**Exercice 1** Ecrire un programme de construction de la figure suivante.
On utilisera seulement deux mesures : le rayon du cercle est 8 cm, la largeur d'un rectangle est 7 cm.
(D'après « Nouvel objectif calcul » cm2 )



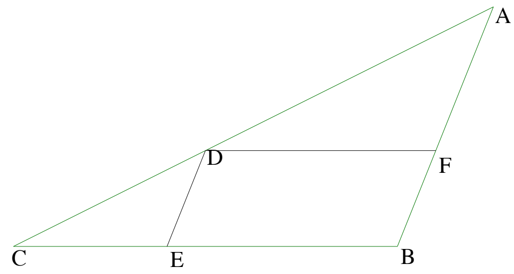
**Exercice 2**
On dispose de cubes ayant deux faces opposées rouges, deux faces opposées bleues et deux faces opposées jaunes.
On fabrique à l'aide de ces cubes des tours parallélipipédiques en empilant trois cubes l'un sur l'autre.
Les différentes tours ne se distinguent donc que par leurs couleurs
Dans ce problème, on tient compte de l'ordre des tours, c'est à dire q'une face avec un carré bleu en bas et deux jaunes au dessus est différente d'une face avec un carré bleu en haut et deux jaunes en dessous.

Combien de tours différentes peut-on fabriquer ?

**Exercice 3**

Le triangle ABC a une aire de 25 $cm^2$.
D est le point de [AC] tel que CD = 2/5 AC
E est le point de [BC] tel que (DE) // (AB)
F est le point de [AB] tel que (DF) // (BC)

Calculer l'aire du parallélogramme BEDF.




**Exercice 4**

Déterminer le plus petit nombre entier strictement positif dont l'écriture en base 4 se termine par deux zéros et dont l'écriture en base 6 se termine également par deux zéros.

**Exercice 5**

On veut fabriquer un pavé droit de dimensions 48 cm, 72 cm et 120 cm en empilant des cubes tous identiques. On utilise uniquement des cubes dont les arêtes ont pour mesure un nombre entier de cm, et on ne veut pas utiliser plus de 1000 cubes.
Trouver toutes les valeurs possibles pour la mesure de l'arête des cubes.

**Exercice 6**

Pour vider une piscine qui contient 120 $m^3$ d'eau, on met en marche à 8 h du matin une pompe dont le débit est de 5 litres par seconde. A quelle heure la piscine sera-t-elle entièrement vidée ?

**Exercice 7**

ABC est un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 13 cm, et AC = 12 cm.
On place Un point D sur [AB) tel que AD = 9 cm.
Calculer la longueur CD.

**Exercice 8**

ABCD est un parallélogramme de centre O.
E est le symétrique du point B par rapport au point C.
La droite (EO) coupe (AB) en F et (CD) en G.
Démontrer que EO = 3 OF

**Exercice 9**

Déterminer tous les nombres entiers non nuls, s'il en existe, qui s'écrivent $\overline{ab}$ en base 4 et $\overline{ba}$ en base 5.

**Exercice 10**

Les faces d'un pavé droit ont respectivement pour aires 24 $cm^2$, 40 $cm^2$ et 60 $cm^2$
Déterminer le volume en $cm^3$ de ce pavé.

Corrigés de la feuille d'exercices n° 4

**Exercice 1** (deux programmes possibles parmi beaucoup d'autres).
Construire un triangle AOB, isocèle en O, tel que AO = 8 cm et AB = 7 cm.
Construire le point C, symétrique de B par rapport à (AO).
Construire les points A', B' et C', respectivement symétriques de A, B et C par rapport à O.
Soient E l'intersection de (AC') et (BA'), F l'intersection de (AB') et (CA').
Placer sur (AA') les points G et H tels que OG = OH = OE.
Tracer le cercle de centre O passant par A, les rectangles ABA'B' et ACA'C', le carré EGFH.

Tracer un cercle de centre O et de rayon 8 cm.
Placer un point A sur le cercle.
Placer les points B et C, situés sur le cercle à 7 cm de A.
Placer les points A' B' et C' diamétralement opposés, respectivement à A, B et C.
Tracer les rectangles ABA'B' et ACA'C'.
On appelle E l'intersection de [AB'] et [CA'], on appelle F l'intersection de [AC'] et [BA'].
Tracer le cercle de centre O et qui passe par E.
Ce nouveau cercle coupe la droite (AA') en deux points qu'on appelle G et H.
Tracer le carré EFGH.

**Exercice 2**
Il y a trois façons de placer le premier cube (selon la couleur que l'on place sur les faces horizontales)
Pour chacun de ces choix, il y a six positions possibles du deuxième cube. En effet, on peut à nouveau choisir la couleur placée horizontalement, mais pour chacun de ces choix, on peut placer le cube de deux façons différentes en le tournant de 90° autour de son axe vertical.
On a donc 3 x 6 = 18 tours de deux étages d'aspect différent.
Le troisième cube peut à nouveau être placé de 6 façons différentes ce qui conduit à 18 x 6 = 108 tours différentes de trois étages.

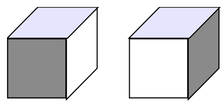
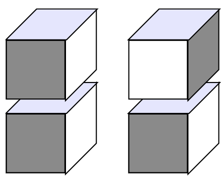


Illustration de l'explication ci-dessus :
Pour le premier niveau, il n'y a pas lieu de distinguer ces deux positions qui ne diffèrent que pas la point de vue de l'observateur :



Pour les niveaux suivants, il est nécessaire de les distinguer, car en posant de ces deux façons un cube sur une tour déjà existante, on obtient deux résultats différents.

**Exercice 3**
Dans le triangle ABC, D est sur (CA), E est sur (CB) et (DE) est parallèle à (AB), le théorème de Thalès permet donc d'affirmer que $\frac{CE}{CB}=\frac{CD}{CA}=\frac{2}{5}$. On a donc CE = 2/5 CB et EB = 3/5 CB.
Les triangles CED et BED ont la même hauteur issue de D, leurs aires sont donc proportionnelles à leurs bases et on a $\mathcal{A}$(CED ) = 2/3 $\mathcal{A}$(BED)
L'aire de BED étant elle même la moitié de celle du parallélogramme BEDF, on a
A(CED ) = 1/3 A(BEDF)

On montre de la même façon que $\mathcal{A}$(ADF ) = 3/2 $\mathcal{A}$(BED) = 3/4 $\mathcal{A}$(BEDF)

Exprimons l'aire de ABC comme somme des aires des deux triangles et du parallélogramme qui le composent. Notons $x$ l'aire de BEDF. On a alors :
$\mathcal{A}$(ABC ) = $x+\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}$ d'où $25=\frac{25x}{12}$, et $x=12$
L'aire du parallélogramme BEDF est donc de 12 cm$^2$

Autre méthode :
Les triangles CDE et DAF sont des réductions du triangle CAB
Le coefficient de réduction est de 2/5 pour CDE et de 3/5 pour DAF.
Dans une réduction, les aires sont multipliées par le carré du coefficient, on a donc :
Aire (CDE) = 25 x 4/25 = 4 $cm^2$
Aire ( DAF) = 25 x 9/25 = 9 $cm^2$
Aire(BEDF) = Aire(ABC) - Aire (CDE) - Aire ( DAF) = 25 – 4 – 9 =12 $cm^2$.

**Exercice 4**
Les nombres dont l'écriture en base 4 se termine par deux zéros sont les multiples de 16.
Les nombres dont l'écriture en base 6 se termine par deux zéros sont les multiples de 36.
Le plus petit nombre satisfaisant les deux conditions est donc le ppmc de 16 et 36
Or $16 = 2^4$ et $36 = 2^2 \times 3^2$, leur ppmc est donc $2^4 \times 3^2$ soit 144.

On peut vérifier que 144 s'écrit $\overline{2100}$ en base 4 et $\overline{400}$ en base 6.

**Exercice 5**
La longueur de l'arête d'un cube doit être un diviseur commun à 48, 72 et 120.
$48 = 2^4 \times 3$      $72 = 2^3 \times 3^2$      $120 = 2^3 \times 3 \times 5$
Le pgcd de 48, 72 et 120 est donc $2^3 \times 3 = 24$.

La longueur de l'arête du cube est donc un diviseur de 24 : elle est choisie parmi les nombres suivant :
1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

Comme on ne veut pas utiliser plus de 1000 cubes, le volume d'un cube doit être supérieur ou égal à un millième du volume du pavé.
(48 x 72 x 120) : 1000 = 414,72  donc le volume d'un cube doit être supérieur à 414 cm3
or on a : $6^3 = 216$      $8^3 = 512$.
Les valeurs possibles pour l'arête du cube sont donc 8 cm, 12 cm et 24 cm.

**Exercice 6**

La pompe qui vide 5 litres d'eau par seconde en vide 300 par minute.
Le nombre de minutes nécessaires sera donc égal à 120 000 / 300 soit 400
La piscine sera donc vide 6 heures 40 minutes après la mise en marche de la pompe, c'est à dire à 14 h 40.

**Exercice 7**
On a $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$
De plus $BC^2 = 13^2 = 169$
Dans le triangle ABC, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , on en déduit (réciproque du théorème de Pythagore) que le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle ADC est alors lui aussi rectangle en A,  on a  donc (théorème de Pythagore) :
$DC^2 = AD^2 + AC^2 = 81 + 144 = 225$. On en déduit que DC = 15.

**Exercice 8**
- E est symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu de [BE]
- ABCD est un parallélogramme, donc (AB) // (CD)
- Dans le triangle BFE, la droite (CD) passe par le milieu de [EB] et est parallèle au côté [BF], donc elle passe par le milieu de [EF]. G est donc le milieu de [EF].

- ABCD est un parallélogramme, il admet donc le point O comme centre de symétrie.
- G est situé sur le parallélogramme, donc le symétrique de G par rapport à O est situé sur le parallélogramme.

- Par définition, le symétrique de G par rapport à O est sur la droite (GO),
- Le symétrique de G par rapport à O et sur (GO) et sur le parallélogramme, c'est donc F.
- F et G sont symétriques par rapports à O, donc O est le milieu de [GF]

- G étant le milieu de [EF] et O celui de [GF], on a EO = 3 OF.

**Exercice 9**
Pour qu'un tel nombre existe, on doit avoir $4a + b = 5b + a$, d'où $3a = 4b$
Ceci impose que a est un multiple de 4
a ne peut pas valoir 0, sinon on aurait aussi $b = 0$ or on cherche un entier non nul.
a ne peut pas valoir 4 ni 8 car l'écriture en base 4 utilise uniquement les chiffres 0 1 2 et 3.
Il n'existe donc pas de nombres vérifiant la condition demandée.

**Exercice 10**
Soient a, b et c les mesures des arêtes du pavé. On a $ab = 24$, $bc = 40$ et $ca = 60$
En multipliant membre à membre les trois égalités on obtient $ab \times bc \times ca = 57600$, d'où $(abc)^2 = 57600$, et $abc = \sqrt{57600} = 240$.
Le volume du pavé est de 240 $cm^3$.