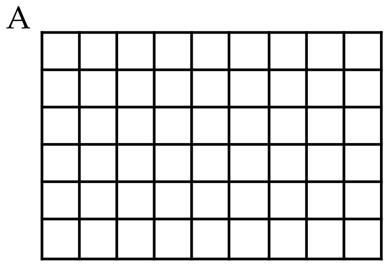
Groupe seconde chance
Feuille d'exercices numéro 5

Exercice 1
Ecrire chacun des nombres ci-dessous sous forme d'une puissance d'un nombre entier.
On laissera visible les étapes du calcul.

$A = 2^{10} \times 4^{3}$ $B = 3 \times 5^{6} + 2 \times 5^{6}$ $C = 7 \times 3^{6} + 6 \times 3^{5}$

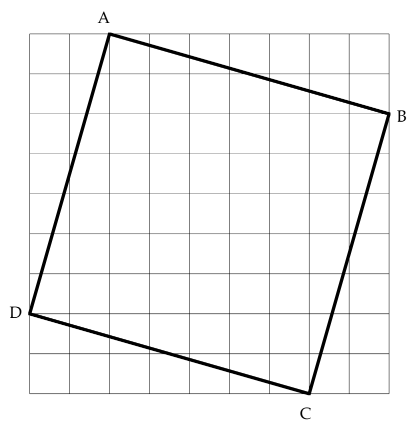
Exercice 2
On trace en suivant les lignes de la grille ci-contre des rectangles.
Combien peut-on tracer de rectangles dont A soit un des sommets ?



Exercice 3
Le prix d'un objet est de 350 €.
Le prix de cet objet subit une augmentation de 10% puis une diminution de 20%
Calculer le prix final, ainsi que le pourcentage de diminution entre le prix initiale de 350€ et le prix final.

Prouver que si le prix initial est modifié mais si l'on conserve inchangés les pourcentages de l'augmentation et de la diminution, le pourcentage de la diminution entre le prix initial et le prix final reste inchangé.

Exercice 4
1. L'unité d'aire étant le petit carreau du quadrillage, calculer l'aire du carré ABCD.
2. Peut-on tracer des carrés dont les sommets sont situés sur les intersections du quadrillage et dont les aires mesurent respectivement 10, 20 et 30 ?



Exercice 5
On considère un carré ABCD et les deux cercles de centre A qui passent respectivement par B et par C.
Comparer l'aire du petit disque et celle de la couronne.

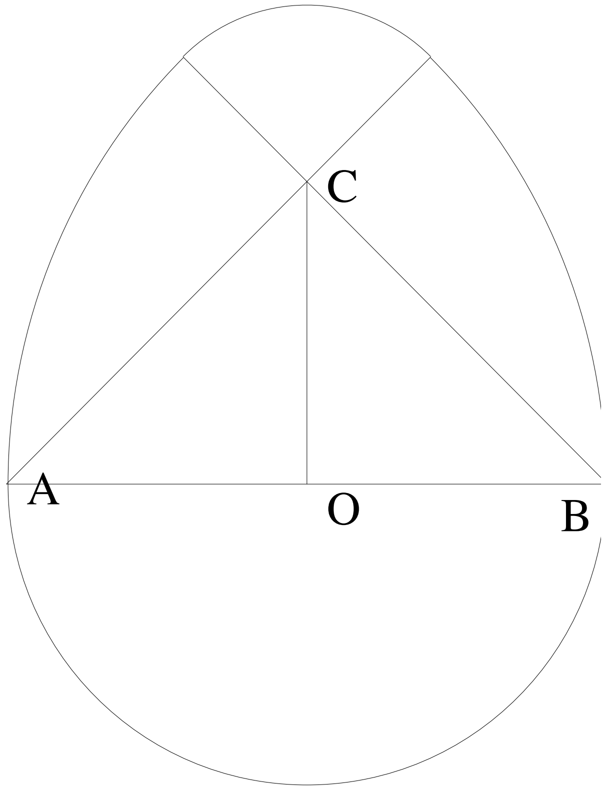
Exercice 6
Deux villes, A et B, sont distantes de 100 km.
Une automobile part de A à 8h et se dirige vers B à la vitesse constante de 75 km/h
Une motocyclette part de A un peu plus tard et se dirige vers B à la vitesse constante de 80 km/h.
Les deux véhicules arrivent à B exactement à la même heure.
A quelle heure la motocyclette a-t-elle quitté A ?

Exercice 7

Soit $\alpha=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$ écrivez α sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 8

Ecrire un programme de construction pour la figure ci-contre.
On admettra que les longueurs OA OB et OC sont égales à 3 cm, que tous les arcs de cercles ont leur centre sur un des points nommés, et que les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires.



Exercice 9

Calculer l'aire et le périmètre de la figure ci-contre.

Exercice 10 (CRPE, Martinique, 2000)

On considère une famille (F) de quadrilatères définie comme suit:
Un quadrilatère ABCD appartient à (F) s'il est convexe et si ses diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires

1- Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Argumenter la réponse.
   a) Tous les rectangles appartiennent à (F).
   b) Certains éléments de (F) sont des parallélogrammes.

2- On considère un quadrilatère ABCD de (F).
Soient E F G et H Les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], et [AD].
   a) Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? Le démontrer.
   b) Quelle est la condition supplémentaire a imposer à ABCD pour que EFGH soit un carré ? Le justifier.

3- On considère un quadrilatère ABCD de (F) tel que:
AC = BD = 10 cm, AB = 6 cm et l'angle ABC est droit.
   a) Construire à la règle et au compas, le quadrilatère ABCD.
   b) si 0 est le point d intersection des diagonales [AC] et [BD], calculer BC puis OB.

La figure obtenue est le début d'un patron d'un tétraèdre BADC dont ABC et ACD sont deux faces perpendiculaires (si ACD est la base, [OB] est la hauteur du tétraèdre).
   c) Montrer que le triangle BOD est rectangle. En utilisant les résultats précédents, déduire une construction, en vraie grandeur, de la longueur de l'arête [BD] du tétraèdre BADC.
   d) Terminer le patron, avec règle et compas. en laissant apparaître les traces justificatives des constructions.

Correction des exercices de la feuille n° 5

Exercice 1

$A = 2^{10} \times 4^{3} = 2^{10} \times 4 \times 4 \times 4 = 2^{10} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{16}$

$B = 3 \times 5^{6} + 2 \times 5^{6} = 5 \times 5^{6} = 5^{7}$

$C = 7 \times 3^{6} + 6 \times 3^{5} = 7 \times 3^{6} + 2 \times 3 \times 3^{5} = 7 \times 3^{6} + 3 \times 3^{6} = 9 \times 3^{6} = 3 \times 3 \times 3^{6} = 3^{8}$

Exercice 2

Première méthode :

Utilisons comme unité de longueur le côté d'un petit carreau.

Les rectangles dont le côté vertical mesure 1 sont au nombre de 9 (la mesure de leur côté horizontal peut prendre toute les valeurs de 1 à 9)

Il y a de même 9 rectangles dont le côté horizontal mesure 2, 9 rectangles dont le côté horizontal mesure 3, et ainsi de suite.

Le nombre total de rectangles est donc 6 x 9 = 54

Deuxième méthode :

Intéressons nous au sommet opposé à A pour chacun des rectangles. Ce sommet peut se placer n'importe où sur les intersections de la grille, sauf sur la ligne horizontale supérieure ou sur la ligne verticale de gauche. Il y a donc 6 x 9 = 54 positions possible pour ces points, ce qui correspond à 54 rectangles.

Exercice 3

Une augmentation de 10% correspond à une multiplication par 1,10

Une diminution de 20% correspond à une multiplication par 0,80

Ces deux variations successives correspondent donc à une multiplication par 1,10 x 0,80 = 0,88 ce qui traduit une diminution de 12%

Cette diminution est la même quel que soit le prix de départ, en particulier s'il est de 350€ comme dans la première question.

Dans le cas où le prix initial est 350€, le prix final est alors 350 x 0,88 =308 €.

Exercice 4

En prenant comme unité de longueur la longueur du côté d'un petit carré, l'unité d'aire correspondante sera l'aire d'un petit carré.

Si on appelle P le point situé en haut à droite de la grille dessinée, le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABP, permet alors d'affirmer que $AB^2 = 7^2 + 2^2 = 53$.

L'aire du carré ABCD mesure donc 53.

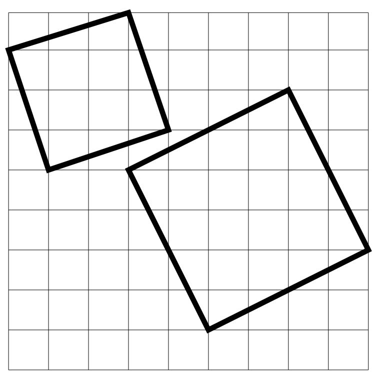
Répartissons les carrés dont les sommets sont situés sur les intersections du quadrillage en deux catégories :

- Ceux dont les côtés sont situés sur les lignes du quadrillage.

Aucun carré de cette catégorie ne peut avoir une aire mesurant 10, 20, ou 30, car ces nombres ne sont pas des carrés de nombres entiers.

- Ceux dont les côtés ne sont pas sur les lignes du quadrillage.

Le côté d'un carré peut alors être consideré comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle, comme dans la première question. L'aire du carré est alors égale à la somme des carrés des côtés de l'angle droit du triangle rectangle.



Les carrés des premiers entiers étant 1, 4, 9, 16, 25, on voit qu'on peut obtenir 10 comme somme de 1 et 9, 20 comme somme de 16 et 4, mais qu'il est impossible d'obtenir 30 comme somme de deux de ces nombres, par conséquent on ne peut pas tracer de carré d'aire mesurant 30.

Exercice 5

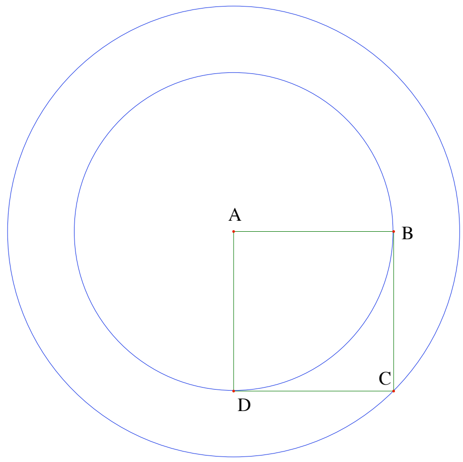
ABCD étant un carré, on a AC = AB $\sqrt{2}$

L'aire du petit disque mesure π AB^2

L'aire du grand disque mesure π AC^2, soit π (AB $\sqrt{2}$)^2 ou 2 π AB^2

On en conclut que l'aire du grand disque est égale au double de l'aire du petit disque.

Si on note a l'aire du petit disque, l'aire de la couronne est égale à 2a – a = a, elle est égale à celle du petit disque.



Exercice 6

La durée du trajet, en heures, pour l'automobile est de 100 / 75 = 4 / 3 heures, soit une heure et 20 minutes.

La durée du trajet pour la motocyclette est 100 / 80 = 5 / 4, soit une heure et 15 minutes.

La durée du trajet étant de 5 minutes plus courte pour la motocyclette, celle-ci doit partir 5 minutes après l'automobile, soit à 8 heures 5 minutes.

Exercice 7

$$\alpha=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{2}{5}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{12}{5}}} = 1+\cfrac{1}{2+\frac{5}{12}} = 1+\cfrac{1}{\frac{29}{12}} = 1+\frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

Remarque, on peut effectuer ce calcul un peu plus rapidement si à chaque étape on choisit de multiplier numérateur et dénominateur de l'avant dernière fraction par le dénominateur de la dernière fraction, on obtient alors :

$$\alpha=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{2}{5}}} = 1+\cfrac{1}{2+\frac{5}{12}} = 1+\frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

Exercice 8

Tracer un segment [AB] de longueur 6 cm et son milieu O.

Tracer un demi-cercle de centre O et d'extrémités A et B

Tracer la médiatrice de [AB] et placer C sur cette médiatrice, à 3 cm de O, dans le demi plan limité par (AB) et ne contenant pas le demi-cercle.

Tracer les demi-droites [AC) et [BC).

Tracer l'arc de cerle de centre A, dont l'une des extremités est B et l'autre extremité sur [AC) (il existe deux arcs de cerle répondant à cette définition, on choisira celui qui est plus petit qu'un demi-cercle).

Soit M l'extremité de cet arc située sur [AC).

Tracer l'arc de cerle de centre B, dont l'une des extremités est A et l'autre extremité sur [BC) (il existe deux arcs de cerle répondant à cette définition, on choisira celui qui est plus petit qu'un demi-cercle).

Soit N l'extremité de cet arc située sur [BC).

Tracer le quart de cercle de centre C et d'extremités M et N.

Tracer un segment [OC] de longueur 3cm, puis le cercle de centre O et passant par C.

Construire un diamètre [AB] perpendiculaire à [OC].

Constuire le cercle de centre A et passant par B, il coupe [BC) en M.

Construire le cercle de centre B et passant par A, puis le cercle de centre C et passant par M.

Exercice 9

Pour le calcul de l'aire comme pour celui du périmètre, il est nécessaire de calculer la longueur CM (M est le point défini dans la correction de l'exercice 8).

Dans le triangle rectangle isocèle AOC, on a AC = AO $\sqrt{2}$ = 3 $\sqrt{2}$

Comme C est sur [AM], on a CM = AM – AC = 6 - 3 $\sqrt{2}$.

Calcul du périmètre :
$P = (\pi \times 6) / 2 \; + \quad (\pi \times 12) / 8 + (\pi \times 12) / 8 \quad + \quad \pi \times (12 - 6\sqrt{2}) / 4$

$P = 3\pi \quad + \quad 3\pi \quad + \; 3\pi - \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$

$P = \pi \left(9 - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \approx 21,6$ cm

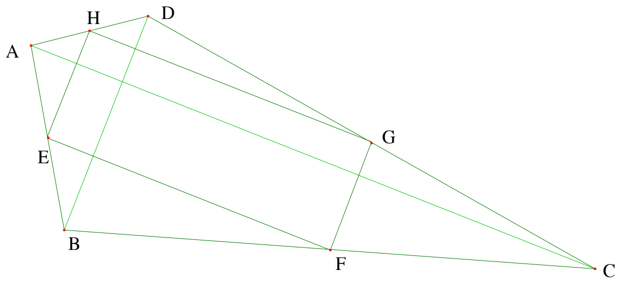
Calcul de l'aire.
Nous allons calculer l'aire en calculant la somme des aires du demi disque, des secteurs angulaires de centres A et B et du secteur de centre C.
Dans cette somme, l'aire du triangle ABC est comptée deux fois (dans chacun des secteurs angulaires de centres A et B), il faut donc la soustraire.

$A = (\pi \times 3^2) / 2 \; + \quad (\pi \times 6^2) / 8 \; + \; (\pi \times 6^2) / 8 \; + \quad \pi \times (6 - 3\sqrt{2})^2 / 4 \quad - \quad 6 \times 3 / 2$

$A = 4,5\,\pi \quad + \quad 4,5\,\pi \quad + \quad 4,5\,\pi \quad + \quad \pi \times (13,5 - 9\sqrt{2}) \quad - \quad 9$

$A = 27\,\pi - 9\pi\sqrt{2} - 9 \approx 35,8 \text{ cm}^2$

Exercice 10
La propriété a) est fausse : tous les rectangles n'appartiennent pas à (F), car de façon générale les diagonales d'un rectangle ne sont pas perpendiculaires (seuls les rectangles qui sont des carrés ont des diagonales perpendiculaires).
La propriété b) est vraie : les losanges sont des éléments de (F) et ce sont des parallélogrammes.



La figure donne l'impression que EFGH est un rectangle, démontrons que c'est bien le cas.

Dans le triangle ADC, H est le milieu de [AD] et G celui de [DC] donc (HG) // (AC).
On démontre de la même façon que (EH) // (BD).
(HG) // (AC) et (BD) est perpendiculaire à (AC), donc (BD) est aussi perpendiculaire à (HG)
(EH) // (BD) et (HG) est perpendiculaire à (BD) donc (HG) est perpendiculaire à (EH).
(HG) est perpendiculaire à (EH) donc le quadrilatère EFGH a un angle droit.
On peut démontrer de la même façon que le quadrilatère EFGH a deux autres angles droits, c'est donc un rectangle.

Pour que EFGH soit un carré, il faut que ABCD ait en plus ses diagonales de même longeur.
En effet, le théorème des milieux appliquer aux triangles ABD et ACD permet d'affirmer que
EH = BD / 2 et GH = AC / 2. Si on impose que BD = AC, le rectangle EFGH aura donc deux côtés consécutifs de même longueur, par conséquent ce sera un carré.

Dans la mesure où des indications de longueur sont données, la règle graduée est indispensable, on peut donc commencer par placer trois points A,B et P alignés tels que BA = BP = 6 cm, ce qui facilite le tracer de la perpendiculaire passant par B.
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABC, rectangle en A, on obient :
BC2 = $AC^2 - AB^2 = 100 - 36 = 64$, d'où BC = 8 cm.

L'aire du triangle ABC est égale à AB x BC / 2, et également à AC x BO / 2.
On a donc AB x BC = AC x OB, d'où OB = AC x BC / AC = 4,8cm.

[OB] étant la hauteur du tétraèdre issue de B, elle est perpendiculaire au plan ACD, donc à toutes les droites de ce plan qui passent par O, en particulier à (OD).

Le triangle BOD est rectangle en O , et on connaît les longueurs BO et DO. On peut donc construire ce triangle en vrai grandeur (il s'agit du triangle OBD_1 sur la figure ci-dessous) puis utiliser la longueur BD_1 prise au compas sur ce triangle pour terminer le patron.