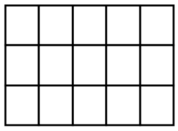
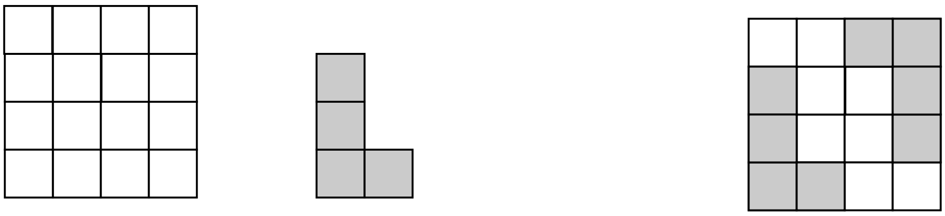
Sept problèmes de dénombrement.

1) Combien de rectangles peut-on tracer en suivant les lignes de cette grille ?



2) Dans ce problème, tous les côtés des triangles ont pour mesure un nombre entier de centimètres.
Combien y a-t-il de triangles différents ayant un périmètre inférieur ou égal à 12 cm ?

3) Combien y a-t-il de positions différentes pour placer ce « L » sur cette grille, les carreaux du « L » coïncidant avec ceux de la grille ?
Dans ce problème, les deux positions dessinées sur le schéma de droite sont considérées comme différentes.



4) On fabrique un grand cube en collant 27 petits cubes identiques.
Chaque petit cube est collé à chacun de ceux qui ont une face en commun avec lui par un point de colle (un seul point de colle pour l'assemblage, et non un point pour chaque petit cube).
Combien de points de colle sont nécessaires pour réaliser l'assemblage ?

5) On dispose de 8 objets coûtant respectivement 1€, 2€…jusqu'à 8€.
On veut partager ces 8 objets en deux lots d'égale valeur.
De combien de façons différentes peut-on effectuer ce partage ?

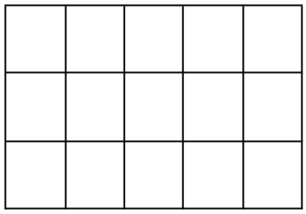
6) Avec des cubes noirs et des cubes blancs on fabrique des assemblages de 6 cubes disposés en deux rangées de trois comme sur ces exemples :

Combien d'assemblages différents peut-on fabriquer ?
Remarque : les exemples, montrent le même assemblage dans deux positions et non deux assemblages différents.

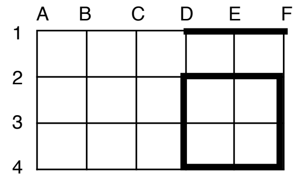
7) Combien y a-t-il de nombres entiers de 4 chiffres dont la somme des chiffres est 5 ?

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Combien peut-on tracer de rectangles en suivant les lignes de cette grille ?

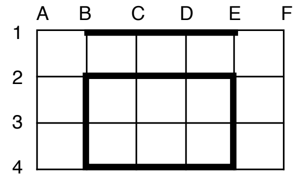


Première idée : faire une partition selon la position horizontale du rectangle. (faire une partition, c'est partager l'ensemble des rectangles qu'on étudie en familles, de telle sorte que chaque rectangle soit dans une famille et dans une seule).

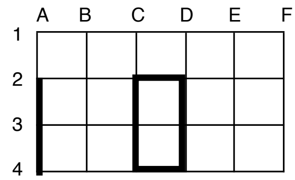


Sur le premier dessin, horizontalement, le rectangle va de D à F, sur le second il va de B à E.
En utilisant les lettres on peut écrire toutes les possibilités :

AB	AC	AD	AE	AF
	BC	BD	BE	BF
		CD	CE	CF
			DE	DF
				EF



Il y a 15 possibilités.
Pour chacune de ces 15 possibilités, il y a plusieurs façons de choisir la position verticale. Sur le dessin ci-contre, verticalement, le rectangle va de 2 à 4.

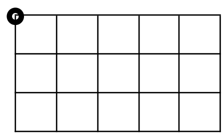


En utilisant les chiffres repères, on peut écrire toutes les possibilités :

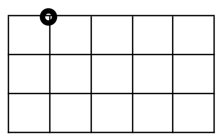
1-2	1-3	1-4
	2-3	2-4
		3-4

Il y a 15 positions horizontales et, pour chaque position horizontale, 6 positions verticales, il y a donc $15 \times 6 = 90$ positions pour le rectangle.

Deuxième idée : faire une partition selon la position d'un sommet du rectangle.
Première famille :
les rectangles pour lesquels le sommet en haut à gauche est sur ce point :

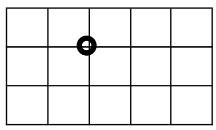


Deuxième famille :
les rectangles pour lesquels le sommet en haut à gauche est sur ce point :

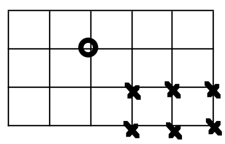


En poursuivant ainsi, on aura bien une partition : chaque rectangle a un sommet placé en haut à gauche, et un seul, il est dans une famille, et une seule.

Combien y a-t-il de rectangles dans chaque famille ? Prenons l'exemple de la famille des rectangles ayant pour sommet en haut à gauche ce point :

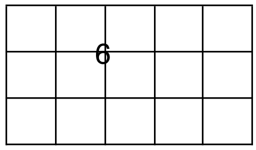


Le sommet en bas à droite peut être placé sur chacune des croix :
Il y a donc 6 rectangles qui ont leur sommet en haut à gauche placé sur le rond.

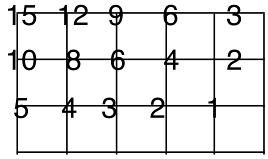


Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Codons ce résultat de la façon suivante :

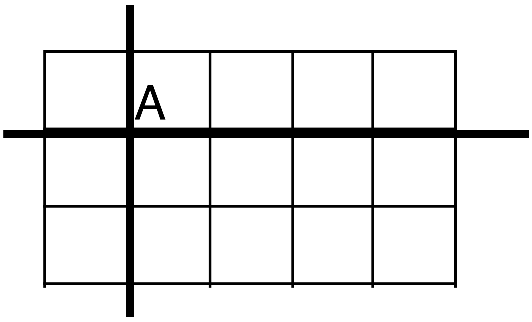


On peut faire la même chose pour chacune des positions possibles du sommet supérieur gauche et on obtient les résultats suivants.



On sait maintenant combien il y a de rectangles dans chaque famille, pour obtenir le nombre total de rectangles il suffit d'additionner ces nombres.
La somme est 90, on peut dessiner 90 rectangles sur cette grille.

Troisième idée : au lieu de compter les rectangles, comptons leurs diagonales.

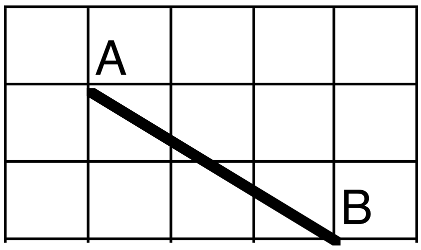


Supposons que j'ai choisi de placer une extrémité de la diagonale sur le point A, alors l'autre extrémité peut être placé sur n'importe quelle ligne sauf celle du point A (il reste 3 possibilités) et sur n'importe quelle colonne sauf celle du point A (5 possibilités).

Il y a donc 15 façons de tracer une diagonale en choisissant A comme extrémité.
Comme j'ai 4x6 = 24 façons de choisir le point A, il y a 15 x 24 = 360 **façons de tracer** une diagonale.

Il y a deux façons de tracer la diagonale [AB] dessinée ci-contre, en partant de A ou en partant de B. Cette diagonale est donc comptée deux fois dans le calcul ci-dessus.
Il en est de même pour chacune des autres diagonales.

Le nombre de diagonales est donc de 360 : 2 = 180



Or chaque rectangle possède deux diagonales, le nombre de rectangles est donc 180 : 2 = 90

Quatrième idée : on peut faire une partition des rectangles selon leurs dimensions.

Il y a les rectangles de 1x1, ceux de 1x2, ceux de 1x3, etc…
Pour chacune des familles, on compte ensuite dans combien de positions le rectangle peut être tracé.

Pour trouver le nombre de positions pour les rectangles 1x3, il est plus facile de redécouper la famille en deux familles plus petites : ceux qui sont disposés verticalement et ceux qui sont disposés horizontalement.

Combien y a-t-il de triangles différents ayant un périmètre inférieur ou égal à 12 cm ? (les côtés étant des nombres entiers).

Première idée : faisons une partition selon le périmètre, celui-ci peut valoir de 3 à 12, et chaque triangle est évidemment dans une famille et une seule : s'il est dans la famille des triangles ayant un périmètre de 6 cm, il n'est pas dans celle des triangles ayant un périmètre de 8 cm ni dans aucune autre.

Pour chaque famille, écrivons les triangles possibles (chaque triangle est désigné par la longueur de ses côtés, dans l'ordre décroissant.

Pérmimètre	Liste des triangles	Nombre de triangles
3	1-1-1	1
4	Aucun (2-1-1 serait aplati).	0
5	2-2-1	1
6	2-2-2	1
7	3-3-1 3-2-2	2
8	3-3-2	1
9	4-4-1 4-3-2 3-3-3	3
10	4-4-2 4-3-3	2
11	5-5-1 5-4-2 5-3-3 4-4-3	4
12	5-5-2 5-4-3 4-4-4	3

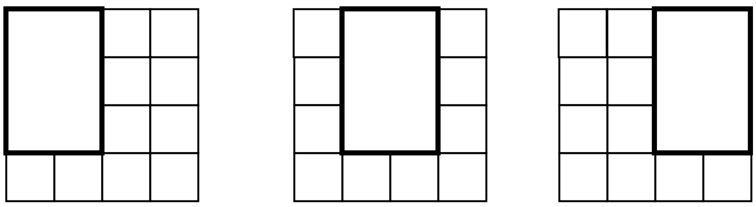
En aditionnant les nombres de triangles obtenus dans chaque famille, on trouve qu'il y en a 18.

Deuxième idée : On peut classer les triangles selon la longueur de leur plus grand côté dans un tableau du même genre que celui ci-dessus.

Combien de positions possibles pour le « L »

Le « L » est tracé à l'intérieur d'un rectangle de 3 carreaux de long et deux de large.
Cerchons le nombre de positions possible de ce rectangle, puis le nombre de positions du L dans le rectangle.

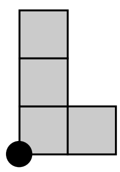
Pour trouver le nombre de positions du rectangle, séparons les en deux familles : les positions verticales et les positions horizontales. Il y a 6 positions verticales : les trois dessinées ci-dessous et les trois obtenues en descendant les rectangles d'un carreau. Il y a également 6 positions horizontales, soit 12 positions possibles du rectangle.



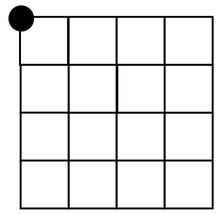
Dans chacun des rectangles, le L peut être disposé de 4 façons, il y a donc en tout 12 x 4 = 48 positions pour le L.

Deuxième méthode :

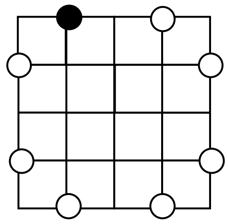
Classons les L selon la position de l'angle marqué d'un point noir :



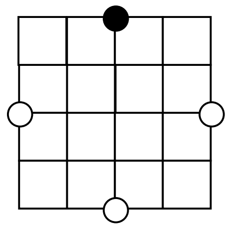
Il y a deux positions du L pour que le point noir soit ici, et il en est de même si on place le point sur un autre sommet du carré.
Il y a donc 8 positions du L pour lesquelles le point est sur un sommet du carré.



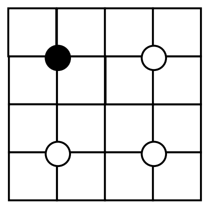
Il y a deux positions du L pour que le point noir soit ici, et il en est de même si on place le point sur un des ronds blancs.
Il y a donc 16 positions du L pour lesquelles le point noir est à une de ces places.



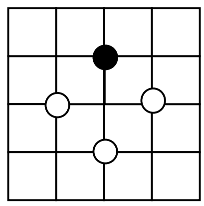
Par le même raisonnement, on trouve qu'il y a 8 positions du L où le point noir occupe une de ces places :



Par le même raisonnement, on trouve qu'il y a 8 positions du L où le point noir occupe une de ces places :



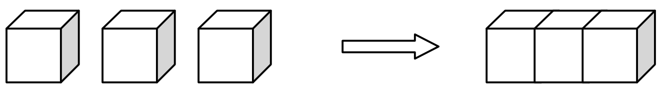
Il y a également 8 positions du L où le point noir occupe une de ces places :



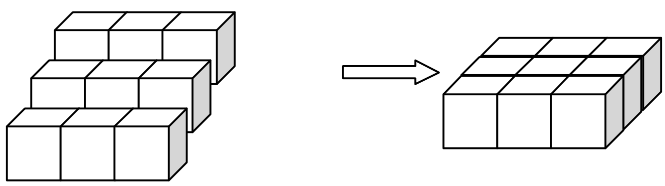
Comme il n'y a aucune position du L avec le point noir au centre du carré, on a envisagé toutes les possibilités, il y a donc en tout 16 + 8 + 8 + 8 + 8 = 48 positions du L.

Combien de points de colle pour assembler 27 petits cubes en un grand cube ?

Il faut 2 points de colle pour assembler trois petits cubes en une barre.
Pour former 9 barres identiques, il faut donc 18 points de colle.



Il faut 6 points de colle pour assembler trois barres en une plaque comme celle-ci.
Pour former trois plaques identiques, il faut donc 18 points de colle.



Il faut à nouveau 18 points de colle pour assembler les 3 plaques en un grand cube (9 pour assembler la plaque du bas et celle du milieu, 9 pour assembler celle du milieu à celle du haut).

Le nombre total de points de colle est donc 3 x 18 = 54.

Autre méthode :
Chaque point de colle relie deux faces de petits cubes, nous allons donc compter combien de faces de petits cubes sont collées et diviser par deux.

Il y a en tout 27 petits cubes, et chacun d'eux a 6 faces, il y a donc en tout 6 x 27 = 162 faces.
Parmi ces faces, seules celles qui sont à l'extérieur du grand cube ne sont pas collées.
Sur chaque face du grand cube, il y a 9 faces de petit cube, il y a donc en tout 6 x 9 = 54 faces de petits cubes non collées.
Il y a donc 162 - 54 = 108 faces de petits cubes qui sont collés, or il faut un point de colle pour assembler deux faces, il faut donc 108 : 2 = 54 points de colle.

Combien de façons de partager les huit objets en deux lots d'égales valeurs.

La valeur totale des objets est de 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 €.

L'un des deux lots contient l'objet à 8 €, essayons de compléter pour obtenir un lot d'une valeur totale de 18 €.
On trouve les possibilités suivantes :

8 + 7 + 3	8 + 7 + 2 + 1	8 + 6 + 4	8 + 6 + 3 + 1	8 + 5 + 4 + 1
8 + 5 + 3 + 2	8 + 4 + 3 + 2 + 1			

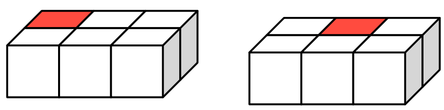
On est certain d'avoir toutes les possibilités parce qu'on a procédé de manière systématique : on essaie toutes les valeurs possibles pour le deuxième objet par ordre décroissant (7 puis 6, puis 5…)
pour chaque valeur du euxième objet, on essaie toutes les valeurs possibles du troisième objet par ordre décroissant.

Pour chacun de ces lots de 18€ contenant le l'objet à 8€, les objets qui n'ont pas été choisis coûtent également 18€, chacun des lots écrits correspond donc à un partage possible, il y a 7 partages possibles.

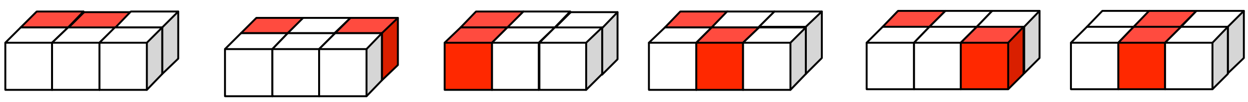
Combien d'assemblages de 6 cubes de deux couleurs ?

Partition utilisée :
famille 1 : tous les cubes sont blancs
famille 2 : il y a un cube blanc et 5 noirs
famille 3 : il y a 2 cubes blancs et 4 noirs
famille 4 : il y a 3 cubes de chaque couleur.
famille 5 : il y a 4 cubes blancs et 2 noirs
famille 6 : il y a 5 cubes blancs et 1 noir
famille 7 : tous les cubes sont noirs.

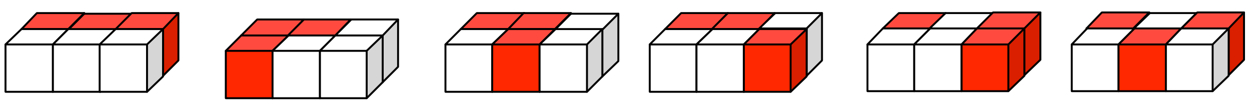
Les familles 1 et 7 comportent chacune un seul objet.
Les familles 2 et 6 comportent chacune 2 objets :



Les familles 3 et 5 comportent chacune 6 objets :



La famille 4 comporte 6 objets :



Le nombre total d'objets différents qu'on peut réaliser est donc :
1 + 1 + 2 + 2 + 6 + 6 + 6 = 24.

Combien de nombres de 4 chiffres dont la somme des chiffres est 5 ?

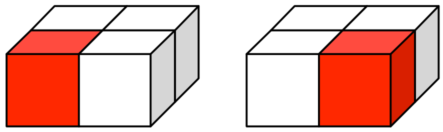
Le plus simple pour ne pas en oublier est probablement de les ranger par ordre croissant ou décroissant. Les voici par ordre décroissant :

5000
4001 4010 4100
3002 3011 3020 3101 3110 3200
2003 2012 2021 2030 2102 2111 2120 2201 2210 2300
1004 1013 1022 1031 1040 1103 1112 1121 1130 1202 1211 1220 1301 1310 1400

Il existe donc 35 nombres de 4 chiffres dont la somme des chiffres est 5.

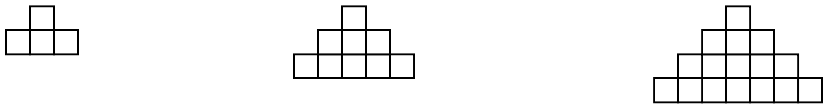
Problèmes supplémentaires :

On dispose de cubes rouges, noirs et bleus, en quantité aussi grande qu'on le veut, et on fabrique des assemblages de 4 cubes disposés « en carré » comme les deux exemples ci-dessous :



Les deux exemples peuvent-être considérés comme deux vues du même objet, il s'agit donc d'un seul et même assemblage.
Combien d'assemblages différents peut-on fabriquer ?

Les trois schémas ci-dessous représentent des assemblages de cubes.
On les désigne par « assemblage n° 1 », « assemblage n° 2 » et « assemblage n° 3 »



En poursuivant des assemblages selon le même principe, combien faudra-t-il de cubes pour réaliser l'assemblage n° 12 ?

Combien peut on dessiner de triangles dont les sommets soient placés sur les points ci-dessous ?
Dans ce problème, deux triangles de mêmes dimensions mais utilisant des sommets différents sont considerés comme distincts.

*   *   *

*   *   *

Combien un polygone a 12 côtés a-t-il de diagonales ?
Information : une diagonale est un segment qui joint deux sommets du polygone et qui n'est pas un côté.