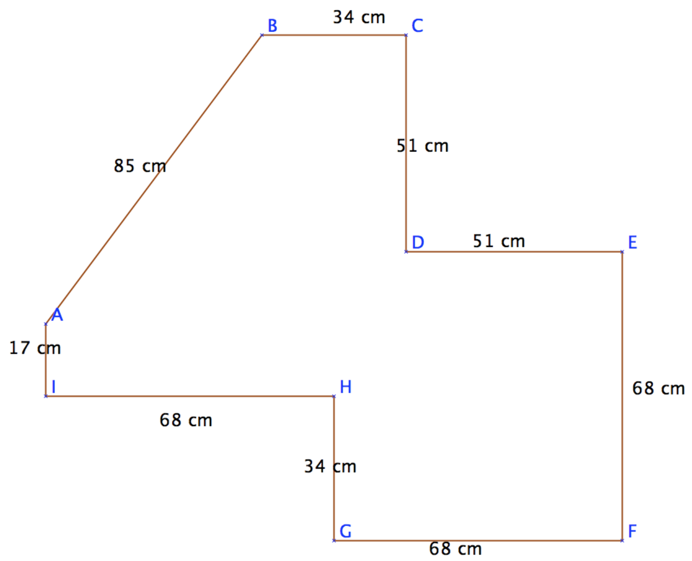
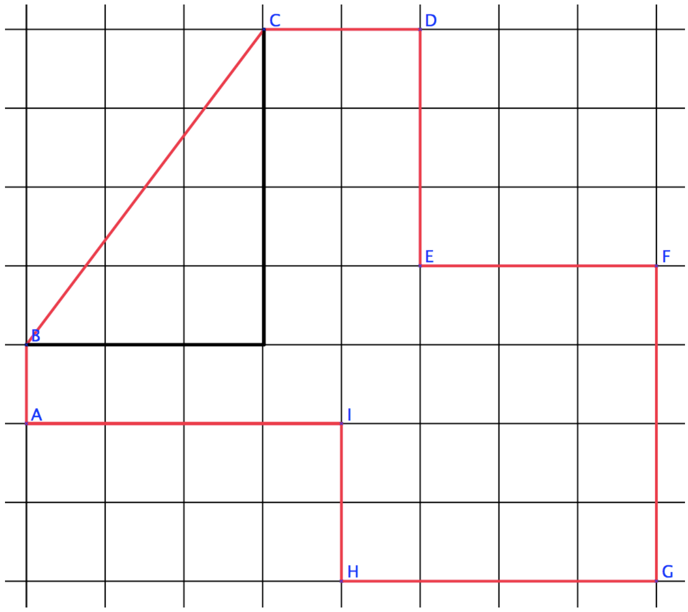
Calculs d'aires et de volumes

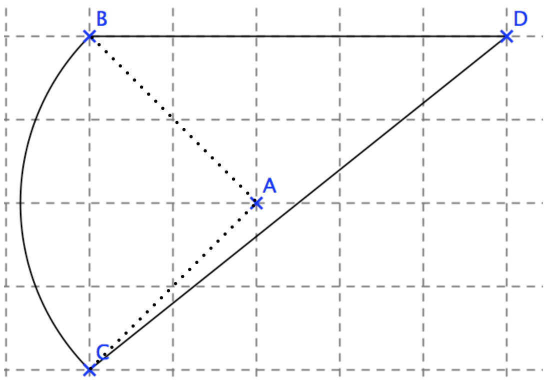
Les angles de cette figure qui semblent droits le sont réellement.





Si on remarque que les mesures indiquées sur les côtés sont toutes des multiples de 17, on peut tracer un réseau de parallèles espacées de 17 cm.
On peut alors calculer l'aire de la figure en prenant comme unité le carreau de la grille ainsi obtenue.
La figure comporte (3 x 4) : 2 = 6 carreaux dans le triangle rectangle d'hypoténuse BC et 27 autres carreaux (qu'on peut compter de un en un).
L'aire de la figure est donc 33 carreaux.
Comme chaque carreau contient 17 x 17 = 289 cm^2,
l'aire de la figure mesure 33 x 289 = 9537 cm^2.

A, B, C et D sont des nœuds du quadrillage.
A est le centre de l'arc de cercle dont les extrémités sont B et C.
Les carreaux du quadrillage ont des côtés de 2 cm.



Pour obtenir l'aire de la figure on peut calculer l'aire du triangle BCD, lui soustraire l'aire du triangle ABC et ajouter celle du quart de disque.
L'aire de BCD mesure 40 cm^2, (8 x 10 : 2).
L'aire de ABC mesure 16 cm^2, (8 x 4 : 2 en prenant BC comme base).

L'aire du quart de disque est égale à $\dfrac{\pi \times AB^2}{4}$

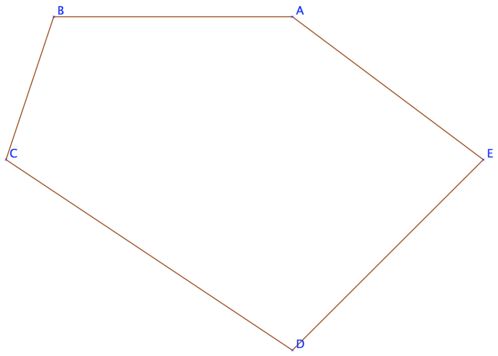
Il faut donc calculer AB^2. Or AB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 4 cm. On a donc (théorème de Pythagore) $AB^2 = 4^2 + 4^2 = 32$

On en déduit que $\dfrac{\pi \times AB^2}{4} = \dfrac{\pi \times 32}{4} = 8\pi$

L'aire de la figure, mesurée en cm^2, est donc égale à 40 - 16 + 8π, soit 24 + 8π.

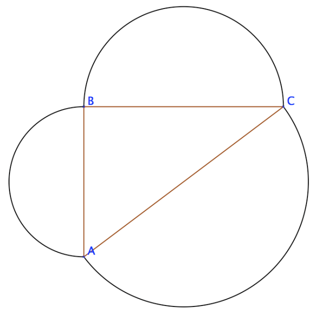
Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Calculer une valeur approchée de l'aire de cette figure.
Vous effectuerez les tracés nécessaires et prendrez les mesures utiles à la règle graduée.



Les calculs s'effectuant à partir de mesures prises sur la figure, il est inévitable que les valeurs trouvées soient approchées, et différentes d'une personne à l'autre.
Si on considère que le trait a une épaisseur d'un quart de millimètre pour une longueur d'environ 360 mm, l'aire du trait est d'environ 90 mm^2 soit presque 1 cm^2, or rien ne permet de savoir si la figure dont on parle comprend le trait ou s'il s'agit seulement de la partie située à l'intérieur.
Il est donc illusoire de chercher une précision meilleure que le centimètre-carré.
Un partage de la figure en trois triangles suffit pour calculer l'aire.
L'aire de la figure fournie sur la feuille d'exercices mesure environ 80 cm^2 .

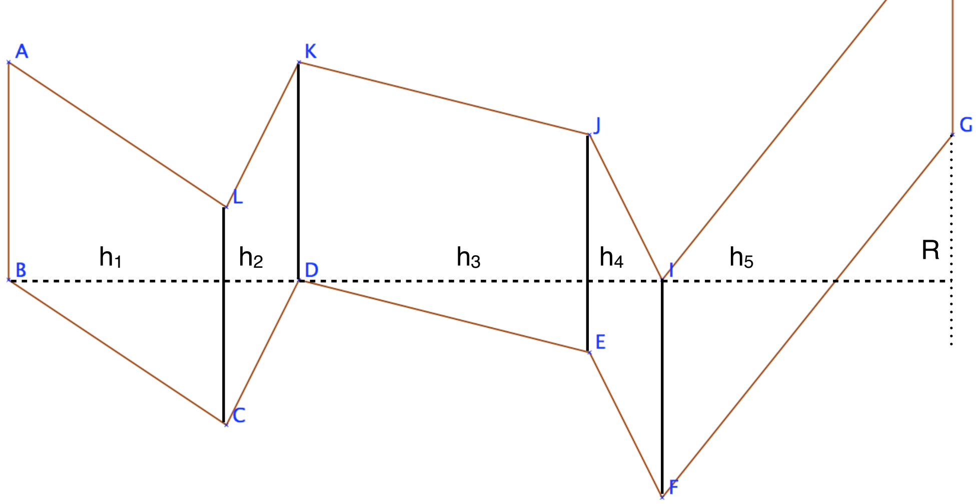
Le triangle ABC est rectangle en B. AB = 6 cm. BC = 8 cm.
Les trois arcs de cercles sont des demi-cercles.



Le triangle ABC étant rectangle en B, on a AC^2 = AB^2 + BC^2 = 100, d'où AC = 10
Les rayons des demi-disques mesurent donc respectivement 3 cm, 4 cm et 5 cm.
L'aire de la figure, exprimée en centimètres carrés, est donc égale à :

$$\frac{\pi\times 3^2}{2}+\frac{\pi\times 4^2}{2}+\frac{\pi\times 5^2}{2}+\frac{6\times 8}{2}=25\pi+24$$

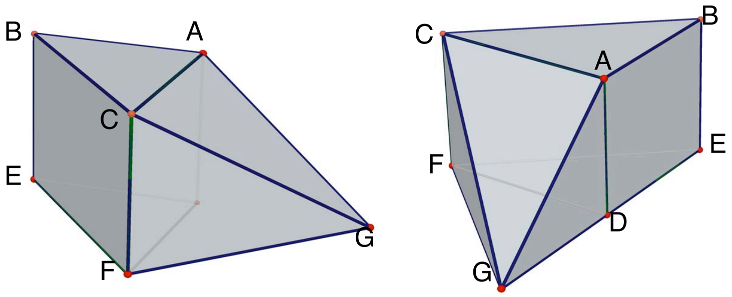
Calculer une valeur approchée de l'aire de cette figure.
Vous effectuerez les tracés nécessaires et prendrez les mesures utiles à la règle graduée.



La méthode la plus efficace pour calculer l'aire de cette figure consiste probablement à la découper en parallélogrammes comme indiqué sur le schéma ci-contre.

On choisit comme base pour chacun des parallélogramme un côté parallèle à (AB).
L'aire de la figure est donc égale à :
AB x h_1 + AB x h_2 + AB x h_3 + AB x h_4 + AB x h_5
soit : AB x (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)
Il suffit donc de prendre deux mesures sur la figure : AB et BR. (attention, la version reproduite ici est réduite)
L'aire de la figure est voisine de 64 cm^2

Voici deux vues différentes du même solide constitué d'un prisme droit et d'une pyramide.
Les triangles FDG, ADG et ABC sont rectangles.
On donne les mesures suivantes :
GD = DE = AC = 8 cm, CF = 6 cm, AG = 10 cm.
Calculer le volume de ce solide.

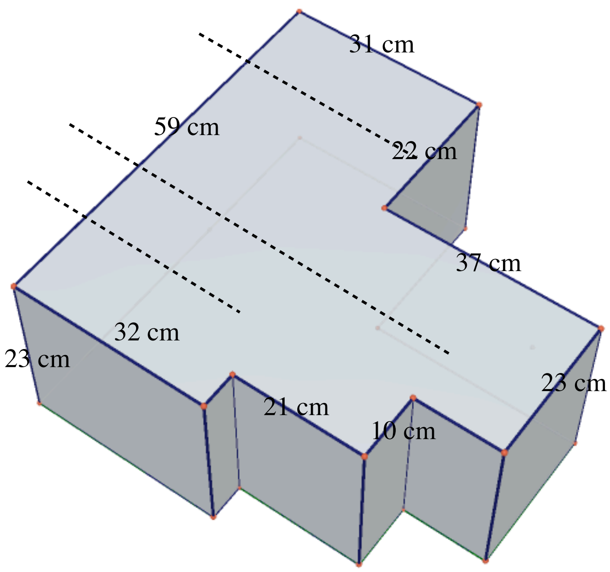


ABCDEF est un prisme droit. sa base est le triangle ABC, rectangle en A et tel que AC = DE = 8 cm.
L'aire de ABC est donc égale à (8 x 8) : 2 soit 32 cm^2
et le volume de ABCDEF est égal à 32 x 6 soit 192 cm^3

ADFCG est une pyramide dont la base est le rectangle ADFC et la hauteur est le segment [GD]

Le volume de cette pyramide est donc égal à $\frac{(6\times 8)\times 8}{3} = 128\ cm^3$

Le volume total du solide est alors égal à 192 cm^3 + 128 cm^3 = 320 cm^3

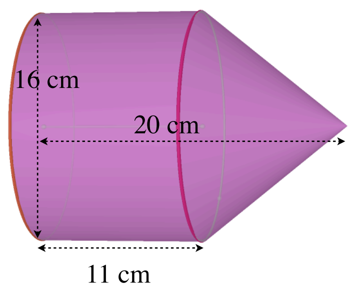


Ce solide est un prisme droit.
De plus, tous les angles de ses bases sont des angles droits.
Calculer son volume.

La base n'ayant que des angles droits, il est possible de la découper en rectangles, par exemple de la manière indiquée sur le dessin ci-contre (mais de nombreux autres découpages sont possibles).

L'aire de la base, mesurée en centimètres carrés, est donc égale à : 31 x 22 + 68 x 23 + 53 x 10 + 32 x 4 = 2904
Le volume du prime droit est donc 2904 x 23 = 66792 cm^3

Remarque : on peut aussi découper le prisme en pavés droits et calculer la somme des volumes mais, si on calcule à la main, cela conduit à poser un plus grand nombre de multiplications.



Ce solide est obtenu en assemblant un cylindre et un cône de révolution.
Calculer son volume.

Le volume du solide, exprimé en centimètres-cubes est obtenu ainsi :

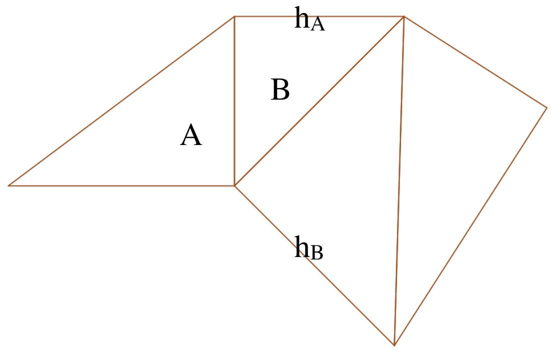
$$\pi\times 8^2\times 11 \quad + \quad \frac{\pi\times 8^2\times 9}{3} \quad = 704\pi \quad + \quad 192\pi \quad = \quad 896\pi$$

Le volume du solide est égal à 896 π cm^3 soit environ 2815 cm^3

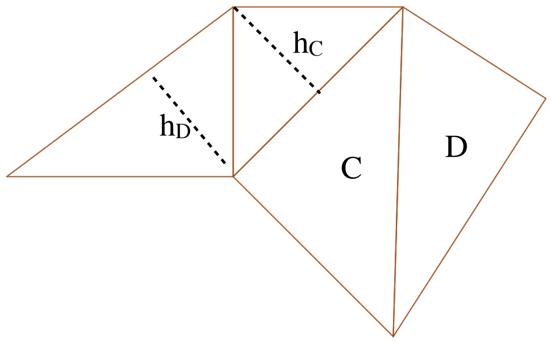
Pour vérifier l'ordre de grandeur, on peut imaginer un cube de 10 cm d'arête (son volume est donc de 1000 cm^3) placé à côté du solide. Est-il vraisemblable que le solide étudié ait un volume environ triple de de cube ?

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Calculer, en mesurant à la règle les longueurs nécessaires, les volumes des solides dont voici les patrons.

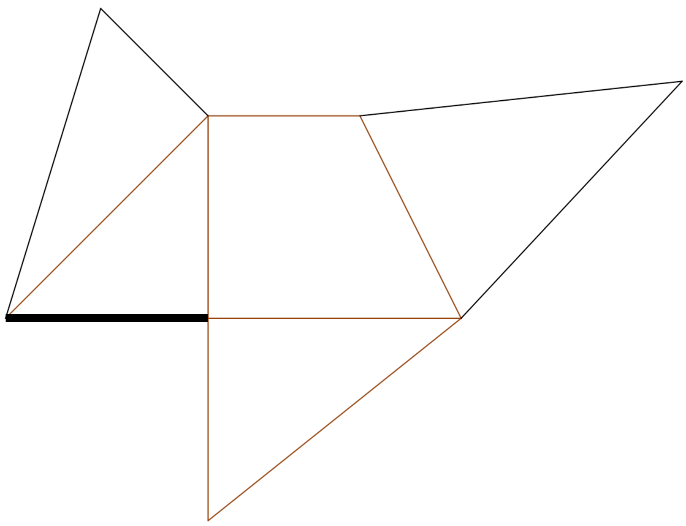


Toutes les faces de cette pyramide sont des triangles, on peut donc choisir n'importe quelle face comme base et utiliser la formule de calcul de volume d'une pyramide à partir de l'aire de cette base et de la longueur de la hauteur correspondante.
Cependant, si on choisit comme base la face marquée A ou la face marquée B, la hauteur correspondante est une arête (marquée h_A ou h_B).
Si on choisit comme base, la face C ou la face D, la hauteur de la pyramide est confondue avec une des hauteurs d'une autre face (ceci est lié à la pyramide particulière choisie, en général la hauteur d'une pyramide peut se situer à l'intérieur de celle-ci, sur une face, ou à l'extérieur de la pyramide).
Il est vivement conseillé de découper le patron proposé et de le plier pour vérifier la position des hauteurs.



En utilisant comme base la face A, le volume de la pyramide, exprimé en centimètres-cubes, se calcule ainsi :
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{7,4\times 5,5}{2}\times 5,5\right)$ soit environ 37 cm^3

Ce patron est celui d'une pyramide.
La base est la seule face non triangulaire.
La hauteur de la pyramide coïncide avec l'arête tracée en gras.



L'aire de la base (qui est un trapèze rectangle) mesure environ : $\frac{(6,5+3,9)\times 5,2}{2}$

Le volume de la pyramide mesure environ :
$\frac{1}{3}\times\left(\frac{(6,5+3,9)\times 5,2}{2}\times 5,2\right)$ soit environ 47 cm^3.

Comme pour les calculs d'aire basés sur des mesures effectuées à la règle, il est normal que les réponses diffèrent d'une personne à l'autre selon la valeur choisie pour chaque mesure.