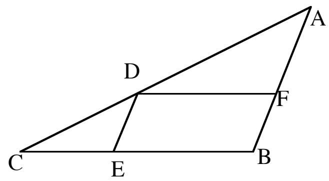
Bachotage 4

Exercice 1
On dispose de cubes ayant deux faces opposées rouges, deux faces opposées bleues et deux faces opposées jaunes.
On fabrique à l'aide de ces cubes des tours parallélipipédiques en empilant trois cubes l'un sur l'autre.
Les différentes tours ne se distinguent donc que par leurs couleurs
Dans ce problème, on tient compte de l'ordre des cubes : une face avec un carré bleu en bas et deux jaunes au dessus est différente d'une face avec un carré bleu en haut et deux jaunes en dessous.

Combien de tours différentes peut-on fabriquer ?

Exercice 2
Le triangle ABC a une aire de 25 cm^2.
D est le point de [AC] tel que CD = 2/5 AC
E est le point de [BC] tel que (DE) // (AB)
F est le point de [AB] tel que (DF) // (BC)

Calculer l'aire du parallélogramme BEDF.



Exercice 3
Déterminer le plus petit nombre entier strictement positif dont l'écriture en base 4 se termine par deux zéros et dont l'écriture en base 6 se termine également par deux zéros.

Exercice 4
Pour vider une piscine qui contient 120 m^3 d'eau, on met en marche à 8 h du matin une pompe dont le débit est de 5 litres par seconde. A quelle heure la piscine sera-t-elle entièrement vidée ?

Exercice 5
ABC est un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 13 cm, et AC = 12 cm.
On place Un point D sur [AB] tel que AD = 9 cm. Calculer la longueur CD.

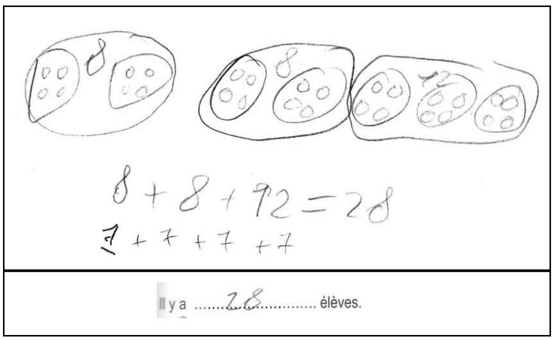
Exercice 6
ABCD est un parallélogramme de centre O. E est le symétrique du point B par rapport au point C.
La droite (EO) coupe (AB) en F et (CD) en G. Démontrer que EO = 3 OF

Question didactique.
Lors d'une évaluation réalisée en CE2, lors des premiers jours de l'année scolaire 2006-2007, les élèves ont eu à résoudre le problème suivant :

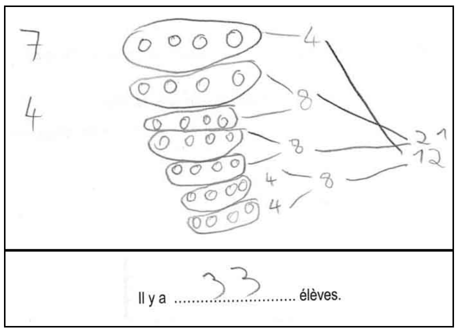
La maîtresse a disposé les élèves de sa classe en groupe. Il y a 7 groupes de 4 élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

Décrire la procédure de chacun des élèves dont voici les productions en mettant en évidence les réussites et les erreurs éventuelles.

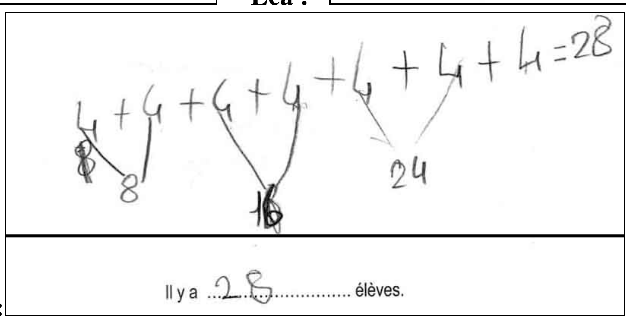
Karim :



Léa :



Nathalie :



Corrigé de la feuille de bachotage 4

Exercice 1
Il y a trois façons de placer le premier cube (selon la couleur que l'on place sur les faces horizontales)
Pour chacun de ces choix, il y a six positions possibles du deuxième cube. En effet, on peut à nouveau choisir la couleur placée horizontalement, mais pour chacun de ces choix, on peut placer le cube de deux façons différentes en le tournant de 90° autour de son axe vertical.
On a donc 3 x 6 = 18 tours de deux étages d'aspect différent.
Le troisième cube peut à nouveau être placé de 6 façons différentes ce qui conduit à 18 x 6 = 108 tours différentes de trois étages.

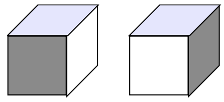
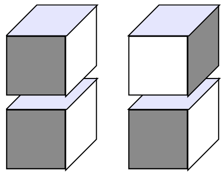


Illustration de l'explication ci-dessus :
Pour le premier niveau, il n'y a pas lieu de distinguer ces deux positions qui ne diffèrent que par le point de vue de l'observateur :



Pour les niveaux suivants, il est nécessaire de les distinguer, car en posant de ces deux façons un cube sur une tour déjà existante, on obtient deux résultats différents.

Exercice 2
Dans le triangle ABC, D est sur (CA), E est sur (CB) et (DE) est parallèle à (AB), le théorème de Thalès permet donc d'affirmer que $\frac{CE}{CB}=\frac{CD}{CA}=\frac{2}{5}$. On a donc CE = 2/5 CB et EB = 3/5 CB.
On en déduit que CE = 2/3 EB
Les triangles CED et BED ont la même hauteur issue de D, leurs aires sont donc proportionnelles à leurs bases et on a
$\mathcal{A}$(CED) = 2/3 $\mathcal{A}$(BED)
L'aire de BED étant elle même la moitié de celle du parallélogramme BEDF, on a
A(CED) = 1/3 A(BEDF)

On montre de la même façon que $\mathcal{A}$(ADF) = 3/2 $\mathcal{A}$(BED) = 3/4 $\mathcal{A}$(BEDF)

Exprimons l'aire de ABC comme somme des aires des deux triangles et du parallélogramme qui le composent. Notons x l'aire de BEDF. On a alors :
$\mathcal{A}$(ABC) = $x+\frac{x}{3}+\frac{3x}{4}$ d'où $25=\frac{25x}{12}$, et $x=12$
L'aire du parallélogramme BEDF est donc de 12 cm^2

Autre méthode :
Les triangles CDE et DAF sont des réductions du triangle CAB
Le coefficient de réduction est de 2/5 pour CDE et de 3/5 pour DAF.
Dans une réduction, les aires sont multipliées par le carré du coefficient, on a donc :
Aire (CDE) = 25 x 4/25 = 4 cm^2
Aire (DAF) = 25 x 9/25 = 9 cm^2
Aire(BEDF) = Aire(ABC) - Aire (CDE) - Aire (DAF) = 25 – 4 – 9 =12 cm^2.

Exercice 3
Les nombres dont l'écriture en base 4 se termine par deux zéros sont les multiples de 16.
Les nombres dont l'écriture en base 6 se termine par deux zéros sont les multiples de 36.
Le plus petit nombre satisfaisant les deux conditions est donc le ppmc de 16 et 36
Or 16 = 2^4 et 36 = 2^2 x 3^2, leur ppmc est donc 2^4 x 3^2 soit 144.
On peut vérifier que 144 s'écrit $\overline{2100}$ en base 4 et $\overline{400}$ en base 6.

Exercice 4
La pompe qui vide 5 litres d'eau par seconde en vide 300 par minute.
Le nombre de minutes nécessaires sera donc égal à 120 000 / 300 soit 400
La piscine sera donc vide 6 heures 40 minutes après la mise en marche de la pompe, c'est à dire à 14 h 40.

Exercice 5
On a AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169
De plus BC^2 = 13^2 = 169
Dans le triangle ABC, on a AB^2 + AC^2 = BC^2 , on en déduit (réciproque du théorème de Pythagore) que le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle ADC est alors lui aussi rectangle en A, on a donc (théorème de Pythagore) :
DC^2 = AD^2 + AC^2 = 81 + 144 = 225. On en déduit que DC = 15.

Exercice 6

- E est symétrique de B par rapport à C donc C est le milieu de [BE]
- ABCD est un parallélogramme, donc (AB) // (CD)
- Dans le triangle BFE, la droite (CD) passe par le milieu de [EB] et est parallèle au côté [BF], donc elle passe par le milieu de [EF]. G est donc le milieu de [EF].

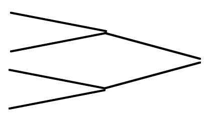
- ABCD est un parallélogramme, il admet donc le point O comme centre de symétrie.
- G est situé sur le parallélogramme, donc le symétrique de G par rapport à O est situé sur le parallélogramme.
- Par définition, le symétrique de G par rapport à O est sur la droite (GO),
- Le symétrique de G par rapport à O et sur (GO) et sur le parallélogramme, c'est donc F.
- F et G sont symétriques par rapports à O, donc O est le milieu de [GF]

- G étant le milieu de [EF] et O celui de [GF], on a EO = 3 OF.

Question didactique.

Production de Karim.
Karim schématise correctement la situation par 7 ensembles de 4 points chacuns représentant les 7 groupes de 4 élèves.
Il regroupe ensuite les ensembles par deux ou trois et note dans chaque regroupement le nombre total d'élèves représenté (8 ou 12 selon les cas).
Karim traduit ensuite la situation par l'écriture correcte d'une somme en ligne (8 + 8 + 12 = 28)
Le schéma fait par Karim permet de déterminer le résultat par comptage effectif des éléments représentés, mais il ne semble pas que Karim ait procédé ainsi car les regroupements qu'il a effectué facilitent le calcul mais ne faciliteraient en rien le comptage.
Karim écrit sous son calcul la somme 7 + 7 + 7 + 7, qui correspond probablement à l'idée de compter le premier élève de chaque groupe, puis le deuxième élève de chaque groupe… Il s'agit probablement d'une forme de vérification du calcul précédent.

Production de Léa.
Léa représente la situation par un schéma très proche de celui de Karim.
Elle effectue ensuite elle aussi des regroupements, mais sous forme d'une arborescence.



La plupart des sommes calculées en utilisant l'arborescence sont correctes (4 + 4 = 8 ; 8 + 4 = 12 ; 21 + 12 = 33) seule la somme 8 + 8 = 21 est fausse. on peut penser que la représentation graphique choisie a contribué à cette erreur, Léa prenant en compte les trois nœuds de l'arborescence et non les quatre branche d'origine, ce qui conduirait à « trois fois huit » mal mémorisé. L'erreur sur le résultat mémorisé pourrait alors avoir été favorisée par la présence du nombre 7 dans l'énoncé, que Léa a recopié sur son travail.
On remarque que Léa produit un résultat faux alors que son schéma lui permettait de déterminer le résultat correct par simple comptage. On peut le regretter, mais on peut aussi considérer cela comme un indice du fait que Léa a bien compris que le calcul est une procédure économique permettant d'éviter le comptage.

Production de Nathalie.
Nathalie n'éprouve pas le besoin de représenter la situation par un schéma, elle reconnait directement une situation additive et écrit correctement l'addition réitérée qui convient.
Pour calculer la somme, Nathalie procède par étape : 4 + 4 = 8, en ajoutant les deux 4 suivants on obtient 16…
La représentation graphique de ces calculs n'est pas très pertinente puisque rien ne montre que le 24 écrit par Nathalie correspond à 6 fois 4 et pas seulement aux deux 4 reliés, mais ce ne serait gènant que si l'écrit de Nathalie était destiné à être communiqué à d'autres élèves, par exemple pour comparer plusieurs procédures.

On peut remarquer, même s'il ne s'agit pas vraiment d'une erreur, qu'aucun élève n'a utilisé la procédure experte consistant à reconnaître une situation multiplicative.