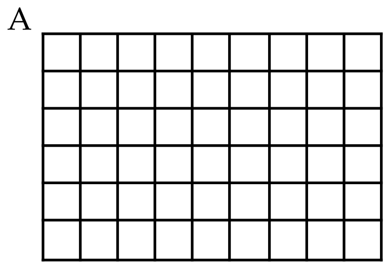
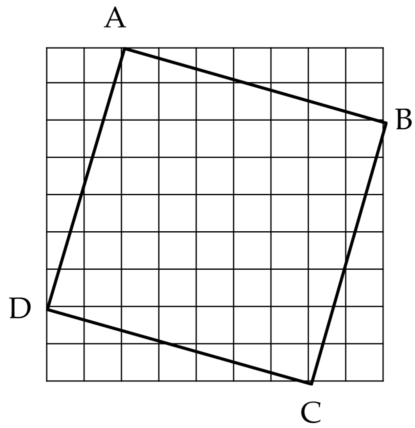
Bachotage 5

Exercice 1
Ecrire chacun des nombres ci-dessous sous forme d'une puissance d'un nombre entier.
On laissera visible les étapes du calcul.
$A = 2^{10} \times 4^3$ $\qquad$ $B = 3 \times 5^6 + 2 \times 5^6$ $\qquad$ $C = 7 \times 3^6 + 6 \times 3^5$



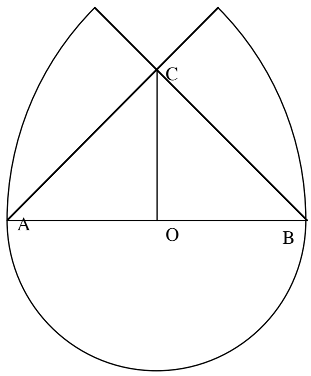
Exercice 2
On trace en suivant les lignes de la grille ci-contre des rectangles.
Combien peut-on tracer de rectangles dont A soit un des sommets ?



Exercice 3
1. L'unité d'aire étant le petit carreau du quadrillage, calculer l'aire du carré ABCD.
2. Peut-on tracer des carrés dont les sommets sont situés sur les intersections du quadrillage et dont les aires mesurent respectivement 10, 20 et 30 ?

Exercice 4
Soit $\alpha = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$ écrivez α sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 5
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle isocèle rectangle en C, O est le milieu de [AB], toutes les courbes sont des arcs de cercles dont le centre est un des points nommés. Calculer l'aire et le périmètre d'un agrandissement de cette figure tel que AB = 6 cm.



Exercice 6 (CRPE, Martinique, 2000)
On considère une famille (F) de quadrilatères définie comme suit:
Un quadrilatère ABCD appartient à (F) s'il est convexe et si ses diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaires

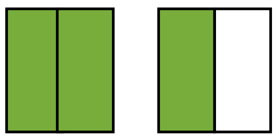
1-Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Argumenter la réponse.
a) Tous les rectangles appartiennent à (F).
b) Certains éléments de (F) sont des parallélogrammes.

2-On considère un quadrilatère ABCD de (F).
Soient E F G et H Les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], et [AD].
a) Quelle est la nature du quadrilatère EFGH ? Le démontrer.
b) Quelle est la condition supplémentaire a imposer à ABCD pour que EFGH soit un carré ? Le justifier.

3-On considère un quadrilatère ABCD de (F) tel que: AC = BD = 10 cm, AB = 6 cm et l'angle ABC est droit.
a) Construire à la règle et au compas, le quadrilatère ABCD.
b) si 0 est le point d intersection des diagonales [AC] et [BD], calculer BC puis OB.

Question didactique.
1.Dans certains manuels de CM1, lors de l'introduction des fractions, on lit : «Une fraction est un nombre».
Expliquez brièvement pourquoi il est difficile pour les élèves concernés de comprendre cette affirmation et donnez les grandes lignes de ce que vour envisageriez pour mieux faire comprendre cette idée.

2.Un maître de CM1 demande à ses élèves quelle fraction correspond à l'aire coloriée dans le dessin suivant.
Les réponses des élèves se répartissent à peu près également entre 3/2 et 3/4.
Donnez les grandes lignes de ce que, selon vous, le maître doit dire lors de la synthèse qui fait suite à cet exercice.



Corrigé de la feuille de bachotage 5

Exercice 1

$A = 2^{10} \times 4^3 = 2^{10} \times 4 \times 4 \times 4 = 2^{10} \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{16}$
$B = 3 \times 5^6 + 2 \times 5^6 = 5 \times 5^6 = 5^7$
$C = 7 \times 3^6 + 6 \times 3^5 = 7 \times 3^6 + 2 \times 3 \times 3^5 = 7 \times 3^6 + 2 \times 3^6 = 9 \times 3^6 = 3 \times 3 \times 3^6 = 3^8$

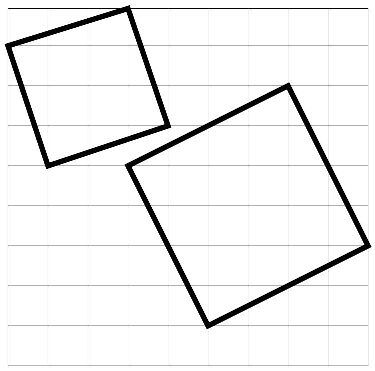
Exercice 2

Première méthode :
Il y a 9 mesures possibles pour le côté du rectangle horizontal si la grille est disposée comme sur l'énoncé : de 1 à 9
Il y a 6 mesures possibles pour le côté du rectangle vertical si la grille est disposée comme sur l'énoncé : de 1 à 6
Pour chaque choix d'une mesure pour le côté horizontal et d'une mesure pour le côté vertical, on peut tracer un et un seul rectangle ayat A comme sommet. On peut faire 9 x 6 = 54 choix différents, on peut donc tracer 54 rectangles.

Deuxième méthode :
Intéressons nous au sommet opposé à A pour chacun des rectangles. Ce sommet peut se placer n'importe où sur les intersections de la grille, sauf sur la ligne horizontale supérieure ou sur la ligne verticale de gauche. Il y a donc 6 x 9 = 54 positions possible pour ces points, ce qui correspond à 54 rectangles.

Exercice 3

En prenant comme unité de longueur la longueur du côté d'un petit carré, l'unité d'aire est l'aire d'un petit carré.
Si on appelle P le point situé en haut à droite de la grille dessinée, le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABP, permet alors d'affirmer que $AB^2 = 7^2 + 2^2 = 53$. L'aire du carré ABCD mesure donc 53.



Répartissons les carrés dont les sommets sont situés sur les intersections du quadrillage en deux catégories :

- Ceux dont les côtés sont situés sur les lignes du quadrillage.

Aucun carré de cette catégorie ne peut avoir une aire mesurant 10, 20, ou 30, car ces nombres ne sont pas des carrés de nombres entiers.

- Ceux dont les côtés ne sont pas sur les lignes du quadrillage.

Le côté d'un carré peut alors être consideré comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle, comme dans la première question. L'aire du carré est alors égale à la somme des carrés des côtés de l'angle droit du triangle rectangle.

Les carrés des premiers entiers étant 1, 4, 9, 16, 25, on voit qu'on peut obtenir 10 comme somme de 1 et 9, 20 comme somme de 16 et 4 (ce qui permet de construire les deux carrés ci-contre dont les aires mesurent respectivement 10 et 20), mais qu'il est impossible d'obtenir 30 comme somme de deux de ces nombres, par conséquent on ne peut pas tracer de carré d'aire mesurant 30.

Exercice 4

$$\alpha = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{2}{5}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{12}{5}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{5}{12}} = 1+\frac{1}{\frac{29}{12}} = 1+\frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

Remarque : on peut effectuer ce calcul un peu plus rapidement si à chaque étape on choisit de multiplier numérateur et dénominateur de l'avant dernière fraction par le dénominateur de la dernière fraction, on obtient alors :

$$\alpha = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{2}{5}}} = 1+\frac{1}{2+\frac{5}{12}} = 1+\frac{12}{29} = \frac{41}{29}$$

Exercice 5

Le demi-disque de diamètre [AB] a pour aire $\frac{9\pi}{2} cm^2$

La somme des aires des deux secteurs angulaires de centres respectifs A et B est égale à $\frac{36\pi}{4} cm^2$ soit $9\pi\ cm^2$

Si on ajoute les aires de ces trois parties de disques, on compte deux fois l'aire du triangle ABC, qui est égale à $9\ cm^2$.

L'aire de la figure est donc égale à $\left(\frac{9\pi}{2} + 9\pi - 9\right) cm^2$ ou $\left(\frac{27\pi}{2} - 9\right) cm^2$ soit environ 33,4 cm^2

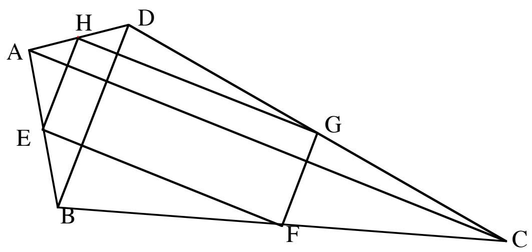
La longueur du demi-cercle de diamètre [AB] est $3\ \pi\ cm$.

La somme des longueurs des deux autres arcs de cercle (un huitième de cercle chacun) est $\frac{2\pi \times 6}{4}\ cm = 3\ \pi\ cm$

Les segments [AC] et [BC] mesurent chacun $3\sqrt{2}\ cm$, les deux segments situés sur le tour de la figure mesurent donc chacun $\left(6 - 3\sqrt{2}\ \right) cm$.

Le périmètre de la figure est donc égal à $\left(6\pi + 12 - 6\sqrt{2}\ \right) cm$ soit environ 22,4 cm.

Exercice 6



La propriété a) est fausse : tous les rectangles n'appartiennent pas à (F), car de façon générale les diagonales d'un rectangle ne sont pas perpendiculaires (seuls les rectangles qui sont des carrés ont des diagonales perpendiculaires).
La propriété b) est vraie : les losanges sont des éléments de (F) et ce sont des parallélogrammes.
Sur le dessin, EFGH semble être un rectangle, démontrons que c'est bien le cas.

Dans le triangle ADC, H est le milieu de [AD] et G celui de [DC] donc (HG) // (AC).

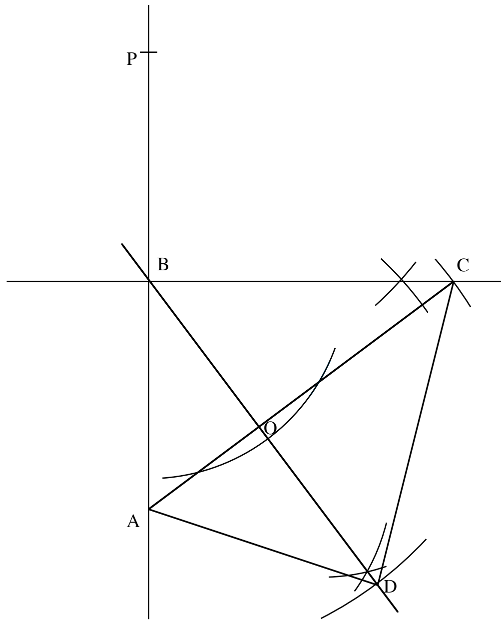
On démontre de la même façon que (EH) // (BD).

(HG) // (AC) et (BD) est perpendiculaire à (AC), donc (BD) est aussi perpendiculaire à (HG)

(EH) // (BD) et (HG) est perpendiculaire à (BD) donc (HG) est perpendiculaire à (EH).

(HG) est perpendiculaire à (EH) donc le quadrilatère EFGH a un angle droit.

On peut démontrer de la même façon que le quadrilatère EFGH a deux autres angles droits, c'est donc un rectangle.



Pour que EFGH soit un carré, il faut en plus que AC = BD.
En effet, dans le triangle ABD, E est le milieu de [AB] et H celui de [AD] donc EH = BD/2. On montre de la même façon que HG = AC/2.
Si on impose que BD = AC, le rectangle EFGH aura deux côtés consécutifs de même longueur, par ce sera donc un carré.

La figure ci-contre (à l'échelle ½), a été tracée en utilisant la règle graduée (qui est nécessairement autorisée puisque des mesures de longueurs sont imposées. On trace un segment [AP] de 12 cm de long et son milieu B (à la règle graduée).

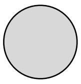
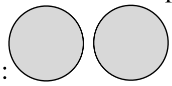
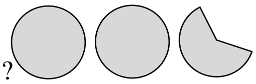
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABC, rectangle en A, on obient :
$BC^2 = AC^2 – AB^2 = 100 – 36 = 64$, d'où BC = 8 cm.

L'aire du triangle ABC est égale à AB x BC / 2, et également à AC x BO / 2.
On a donc AB x BC = AC x OB, d'où OB = AC x BC / AC = 4,8cm.

Question didactique.

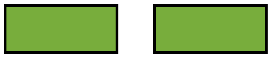
1.Pour un élève de CM1, qui n'a pas encore étudié les fractions ni les nombres décimaux (généralement introduits à l'aide des fractions et donc après celles-ci) le mot nombre désigne nécessairement ce que nous appelons un nombre entier naturel, seul type de nombre qu'il connait. Pour un élève de CM1 qui découvre les fractions, il ne peut donc pas s'agir de nombres.

Pour convaincre les élèves que ces objets sont bien des nombres, on peut insister sur leur fonction : il permettent de dire combien il y a d'une certaine chose quand la valeur est comprise entre deux entiers :

voici un gâteau :  voici deux gâteaux :  Combien y a-t-il de gâteaux ? 

Cette idée peut être transmise explicitement par le maître, mais il est aussi possible de construire une situation de communication dans laquelle les élèves ont à écrire un message permettant de réaliser une quantité non entière.
Le élèves peuvent par exemple tous disposer de la bande unité dessinée ci-dessous à gauche, et les émetteurs doivent écrire un message ne comportant pas de mesure de longueur permettant aux récepteurs de réaliser la bande de droite.
Il est attendu des messages du type «tu partage l'unité en 4 parties égales puis tu mets bout à bout une unité et 3 parties».
Le maître peut ensuite introduire l'écriture conventionnelle des fractions pour exprimer plus efficacement la même idée.

2.Le maître doit surtout insister sur le fait que sa question n'était pas assez précise. En effet les deux réponses peuvent être correctes. Si on considère que c'est un des deux rectangles séparés qui est l'unité, la réponse correcte est 3/2, mais si on considère que c'est l'ensemble du dessin qui est l'unité la réponse correcte est 3/4.
La question pourrait donc être reformulée par exemple ainsi :

1 rectangle colorié :  2 rectangles coloriés : 

Combien de rectangles coloriés ?