Bachotage 6

Exercice 1
On appelle triangles pythagoriciens les triangles rectangles dont les trois côtés ont pour mesure un nombre entier.
t désigne un nombre entier plus grand que 1

- Montrer qu'un triangle dont les côtés mesurent respectivement 2t, $t^2 - 1$ et $t^2 + 1$ est pythagoricien, mais que la réciproque n'est pas vraie.
- Trouver deux triangles pythagoriciens différents dont un côté mesure 26
- Trouver 5 triangles pythagoriciens différents dont un côté mesure 48.

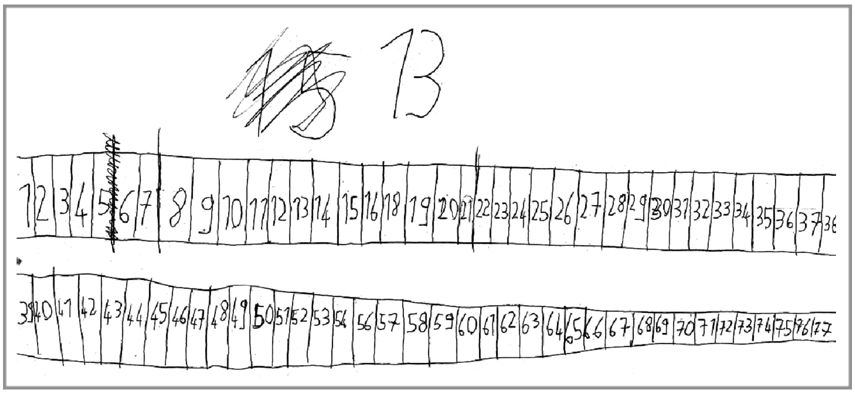
Exercice 2
Tracer à la règle graduée un segment [AB] de 4cm de long puis construire à l'aide seulement de la règle non graduée et du compas le pentagone convexe ABCDE ayant toutes les propriétés suivantes :

- AB = BC = AE
- Les angles de sommet A et C mesurent 135°
- Les angles de sommets B et D sont droits.

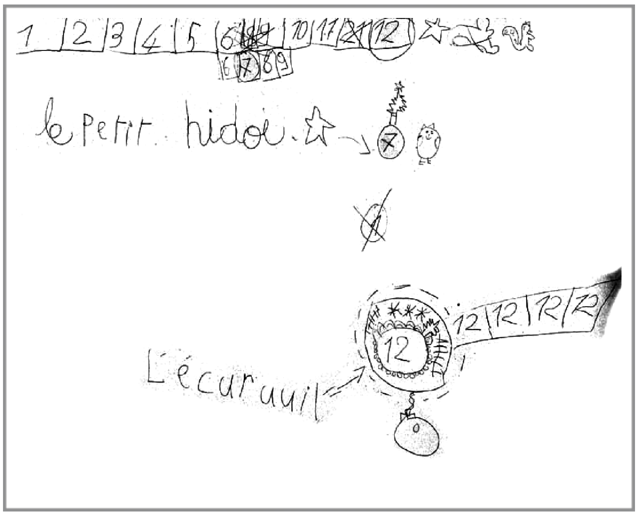
Démontrer que le quadrilatère ACDE est un rectangle, en déduire le périmètre du pentagone ABCDE.

Didactique 1 Dans une classe de CP de 21 élèves, à la fin du premier trimestre, deux poésies ont été lues. Chaque élève apprendra la poésie de son choix. Sept élèves choisissent d'apprendre « le petit hibou », la maîtresse fera donc 7 photocopies pour eux. Elle pose à la classe la question suivante : Faut-il que les autres lèvent la main pour que je les compte ?
Réponse des élèves : non car tout les autres veulent « l'écureuil ».
Combien faut-il que je fasse de photocopies pour eux , demande alors la maîtresse.
Vous trouverez ci-dessous les productions de 2 élèves en réponse à cette question.
Vous les analyserez en faisant apparaître pour chacune d'elles :

- la procédure utilisée
- les compétences mises en œuvres.
- les erreurs éventuelles.



Production de Kevin :



Production de Claire :

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes

Exercice 3

On considère les fractions $\frac{47}{45}$ et $\frac{33}{34}$, puis $\frac{24}{23}$ et $\frac{38}{37}$ et enfin $\frac{3600}{4200}$ et $\frac{1600}{1800}$

Pour chaque paire de fractions, donner une méthode permettant de les comparer sans les réduire au même dénominateur ni effectuer les divisions correspondantes.

Exercice 4

Une automobile effectue un trajet constitué de trois parties de 24 km chacune.
Elle parcourt la première partie du trajet à 90 km/h, et la deuxième à 60 km/h.

a) Quelle est sa vitesse moyenne, en km/h, sur l'ensemble des deux premières parties du trajet.
b) Quelle doit être sa vitesse moyenne sur la troisième partie pour que la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet soit de 60 km/h ?

Exercice 5

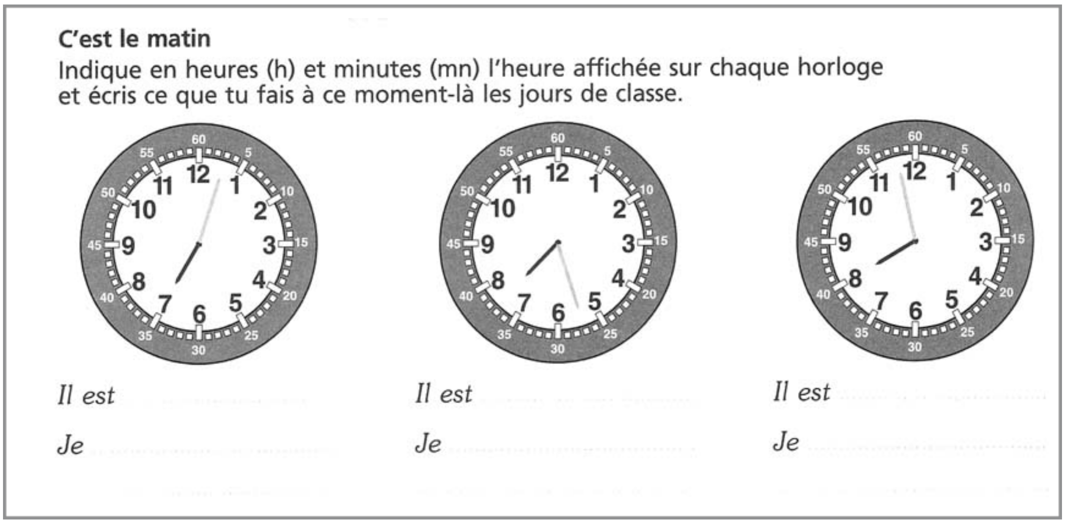
Les affirmations ci-dessous sont-elles vraies ? (justifier)
Un pentagone non croisé dont deux diagonales se coupent en leur milieu a deux côtés parallèles.
Un hexagone non croisé dont deux diagonales se coupent en leur milieu a deux côtés parallèles.

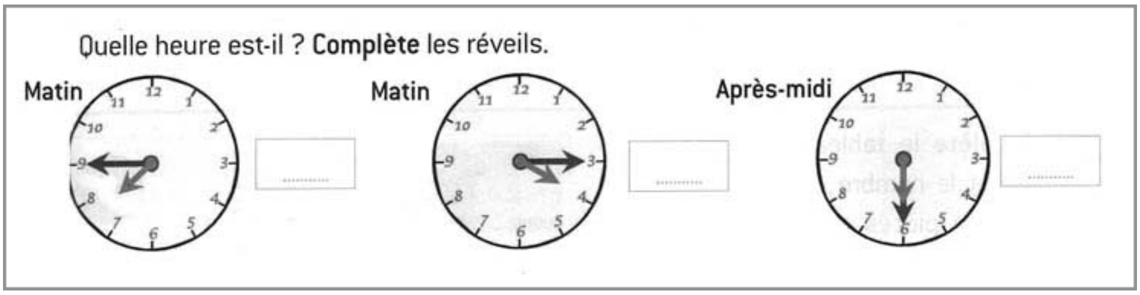
Exercice 6

ABC est un triangle équilatéral. E est le milieu de [AB], F celui de [BC] et G celui de [AC].
Combien peut on tracer de cercles ayant pour centre un des six points nommés, et passant par au moins un des six mêmes points ?

Didactique 2

Voici deux extraits de fichiers destinés au CE1. Le premier est tiré de «J'apprends les maths», éditions Retz, le second de «La clé des maths», éditions Belin.
Indiquez trois différences essentielles entre les deux extraits et, pour chaque différence citée, précisez quel est le choix qui vous semble le plus pertinent.





Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes

Corrigé de la feuille de bachotage 6

Exercice 1

$(2t)^2 + (t^2 – 1)^2 = 4t^2 + t^4 –2t^2 + 1 = t^4 + 2t^2 + 1$ De plus, $(t^2 + 1)^2 = t^4 + 2t^2 + 1$

On constate donc que $(t^2 + 1)^2 = (2t)^2 + (t^2 – 1)^2$

La réciproque du théorème de Pythagore permet alors d'affirmer que le triangle dont les côtés mesurent 2t, t^2 - 1 et t^2 + 1 est rectangle (et donc pythagoricien puisque les mesures des côtés sont des nombres entiers).

Réciproquement, le triangle dont les côtés mesurent 30 40 et 50 est pythagoricien, mais il est impossible qu'un de ses côtés soit égal à t^2 - 1 et un autre à t^2 + 1 car leur différence serait alors égale à 2.

On a 26 = 2 x 13 donc, en prenant t = 13, on a 2t = 26 ; t^2 - 1 = 168 et t^2 + 1 = 170

Le triangle dont les côtés mesurent 26, 168, 170 est donc Pythagoricien.

On a également 26 = 5^2 + 1 donc, en prenant t = 5, on a 2t = 10 ; t^2 - 1 = 24 et t^2 + 1 = 26

Le triangle dont les côtés mesurent 10, 24, 26 est donc Pythagoricien.

Pour 48, on peut procéder de la même façon (48 = 2 x 24 ; 48 = 7^2 – 1).

On peut aussi chercher par la même méthode un triangle pythagoricien dont un côté est un diviseur de 48, puis agrandir le triangle obtenu pour en obtenir un dont un côté mesure 48.

Par exemple, 24 = 5^2 –1, donc en prenant t = 5, on obtient le triangle pythagoricien 10, 24, 26 (le même que dans la question précédente) à partir duquel, en effctuant un agrandissement de coefficient 2, on trouve le triangle pythagoricien dont les côtés mesurent 20, 48 et 52.

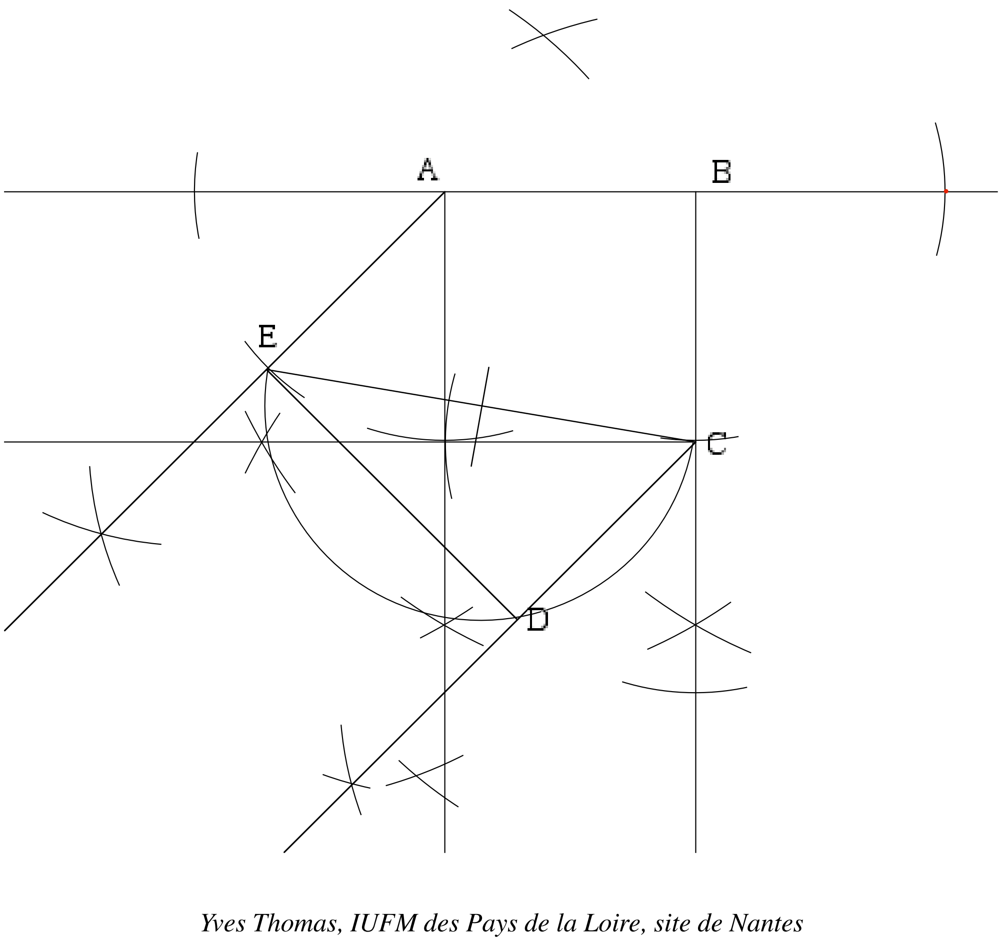
En utilisant cette méthode, on peut trouver les triangles pythagoriciens suivants parmi lesquels vous pouviez choisir les cinq triangles demandés :

48, 575, 577 14, 48, 50 48, 286, 290 20, 48, 52 48, 189, 195 48, 140, 148 48, 90, 102

48, 64, 80 36, 48, 60

On n'a pas prouvé que cette liste contient **tous** les triangles pythagoriciens dont un côté mesure 48.

Exercice 2



La construction (un peu fastidieuse !) nécessite deux idées :
On peut obtenir un angle de 135° comme somme d'un angle droit et d'un angle de 45°.
Pour que l'angle $\widehat{EDC}$ mesure 90°, il faut et il suffit que D soit sur le cercle de diamètre [EC].

ABC est un triangle rectangle isocèle en B, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$ mesurent donc 45°
On en déduit que les angles $\widehat{EAC}$ et $\widehat{DCA}$ mesurent chacun 135- 45 = 90°.
Le quadrilatère ACDE a trois angles droits, c'est donc un rectangle.

[AC], hypoténuse du triangle rectangle isocèle ABC, mesure $4\sqrt{2}$ cm.
ACDE étant un rectangle, DE = AC = $4\sqrt{2}$ cm, et CD = EA = 4cm.
On en déduit que le périmètre du pentagone ABCDE est 16 + $4\sqrt{2}$ cm.

Didactique 1
Kevin construit une frise numérique beaucoup plus longue que ce qui est nécessaire pour le problème.
Il place ensuite une barre isolant les 7 premiers nombres (qui représentent les élèves ayant choisi le hibou) et une autre barre isolant les 21 premiers nombres (qui représentent les 21 élèves de la classe). Il compte ensuite correctement le nombre de cases situées entre les deux barres, qui représentent les élèves de la classe ayant choisi l'écureuil.
Kevin a une bonne maîtrise de la suite des nombres entiers, y compris à l'écrit, il comprend bien le problème posé et son schéma montre qu'il distingue le sens ordinal du sens cardinal des nombres (s'il avait par exemple colorié la case 7, cela mettrait en évidence le 7ème élève et non 7 élèves).
Kévin commet deux erreurs qui relèvent probablement de l'étourderie :
il oublie le nombre 17 dans sa frise numérique,
il isole d'abord 5 élèves au lieu de 7, ce qu'il corrige ensuite.

Claire construit une frise numérique des premiers nombres. elle semble avoir du mal à distinguer 12 de 21 et perd le sens du problème, le même nombre étant utilisé à la fois comme nombre total d'élèves et comme réponse au problème.
Certains éléments du dessin sont sans rapport avec le problème et représentent problement ce que Claire voit dans la classe (décorations de Noël)
La seule compétence clairement établie dans le domaine numérique est l'écriture en chiffre des nombres jusqu'à 11 (en supposant qu'elle ne dispose pas d'un modèle affiché dans la classe).

Exercice 3
$\frac{47}{45} > 1$ et $\frac{33}{34} < 1$, donc $\frac{33}{34} < \frac{47}{45}$ $\qquad$ $\frac{24}{23} = 1 + \frac{1}{23}$ $\frac{38}{37} = 1 + \frac{1}{37}$, donc $\frac{38}{37} < \frac{24}{23}$

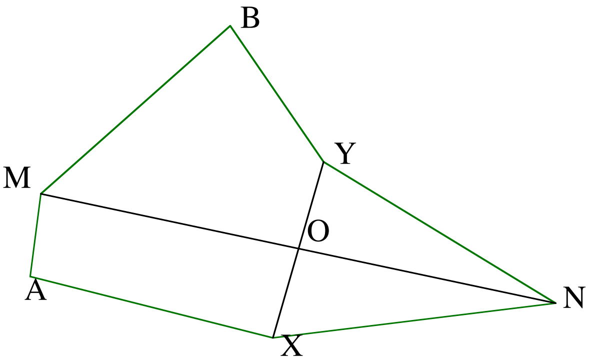
$\frac{3600}{4200} = \frac{6}{7} = 1 - \frac{1}{7}$ et $\frac{1600}{1800} = \frac{8}{9} = 1 - \frac{1}{9}$, or $\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$ donc $\frac{3600}{4200} < \frac{1600}{1800}$

Exercice 4
A 90 km/h, l'automobile parcourt 1,5 km en une minute, 3 km en 2 minutes, 24 km en 16 minutes .
A 60 km/h, l'automobile parcourt 1 km par minute, donc 24 km en 24 minutes.
Les 48 premiers km sont donc parcourus en 16 + 24 = 40 min. A la même vitesse moyenne, on parcourrait 24 km en 20 minutes donc 72 km en 60 min. La vitesse moyenne sur les deux premières parties est donc de 72 km/h.

Si la vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est 60 km/h, la durée totale est de 72min.
Les 24 derniers kilomètres doivent donc être parcourus en 32 min. A la même vitesse, on parcourt 3 km en 4 min, donc 45 km en 60 min. La vitesse sur la dernière partie du trajet doit donc être de 45 km/h.

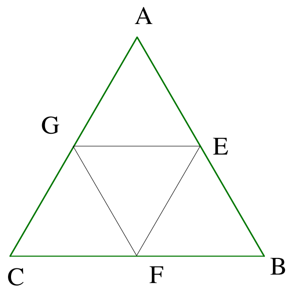
Exercice 5
Soit [MN] et [XY] les diagonales qui se coupent en leur milieu.
Le quadrilatère MXNY est alors un parallélogramme, on a donc [MX] // [NY] et [MY] // [NX]
Soit A le cinquième sommet du pentagone.

Si A est situé entre M et X, ou entre N et Y, alors les segments [MY] et [NX] sont des côtés du pentagone qui a donc deux côtés parallèles.
Si A est situé entre N et X, ou entre M et Y, alors les segments [NY] et [MX] sont des côtés du pentagone qui a donc deux côtés parallèles.
On constate que quelle que soit la position choisie pour le cinquième sommet, le pentagone a deux côtés parallèles, la première affirmation est donc vraie.



La deuxième affirmation est fausse : si on place par exemple le cinquième sommet entre M et X et le sixième entre M et Y, on obtient un hexagone qui n'a pas de côtés parallèles.

Exercice 6
G est le milieu de [CA], E est le milieu de [AB], donc GE = BC/2. Il en est de même pour EF et FG.
La distance entre deux points nommés de la figure peut prendre trois valeurs seulement :
Les longueurs AB, BC et CA sont égales.
Les longueurs AE, EB, BF, FC, CG, GA, GE, FE, GF sont égales
Les longueurs AF, BG et CE sont égales (ce sont les trois hauteurs du triangle équilatéral).



Si on choisit comme centre un sommet de ABC, il y a donc trois mesures possibles pour le rayon, donc trois cercles possibles pour chaque centre.
Si on choisit comme centre un milieu de côté, il n'y a que deux rayons possible, donc deux cercles.

Le nombre de cercles que l'on peut tracer en respectant les conditions est donc 3 x 3 + 3 x 2 = 15

Didactique 2
Sur le deuxième document, deux des trois horloges dessinées ne correspondent à aucune position possible des aiguilles d'une horloge réelle. La petite aiguille se déplace en effet de façon continue et il n'est pas possible qu'elle indique exactement le chiffre 6 en même temps que la grande aiguille. Il est évidemment préférable de représenter des horloges conformes à la réalité.

Sur le premier document, il existe une graduation en minutes, de 5 en 5, en plus de la graduation des heures. Cette graduation facilite la lecture de l'heure précise et est donc utile au début du travail sur la lecture de l'heure. Cependant la plupart des horloges usuelles en sont dépourvues, il sera donc nécessaire de travailler ensuite sur des horloges n'ayant que la graduation principale.

Dans le second document, les heures proposées sont toutes des «quarts d'heure justes» alors que les heures proposées par le premier document sont quelconques (7 h 27 min, 7 h 58 min).
On peut préférer le choix du second document dans un premier temps par souci de simplicité, pour éviter d'avoir à lire le nombre de minutes mais il faudrait alors pouvoir écrire l'heure sous la forme «six heures et demi» ce qui n'est pas proposé.
Par ailleurs le choix du premier document se justifie par le fait qu'en usage réel, il est rare que l'heure à lire soit présisément un quart d'heure juste.

Seul le premier document demande à l'élève de dire ce qu'il fait à l'heure lue sur l'horloge. Il parait intéressant d'installer ainsi des repères pratiques.
Remarque hors question : Presque tous les fichiers de CE1 regroupent le travail sur la lecture de l'heure en une ou deux séances seulement, alors que l'emploi du temps très structuré des classes impose un usage constant de la lecture de l'horloge. La présence d'une horloge murale dans la classe permet un apprentissage basé sur une pratique régulière et fonctionnelle, ce qui est moins facile pour les autres grandeurs.

Seul le deuxième document propose une heure de l'après-midi. C'est intéressant car cela permet de faire remarquer qu'il existe deux affichages possibles de cette heure sur une montre à affichage digital 6 : 30 ou 18 : 30