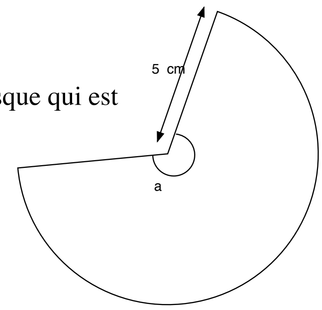
Bachotage 7

Exercice 1
On considère Un segment [AC] de longueur 16 cm, et le point B situé sur [AC] à 6 cm de C.
P est un point du cercle de diamètre [AB] tel que AP = 8 cm. La droite (AP) coupe le cercle de diamètre [AC] en M.
Calculer MC. Calculer l'aire du quadrilatère BPMC.

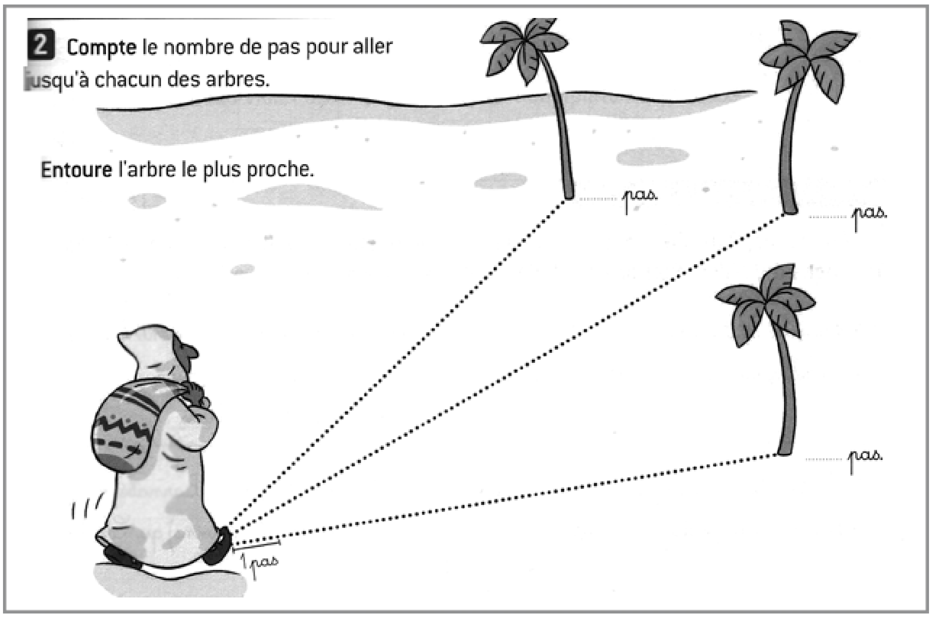
Exercice 2
Soit N un nombre entier qui s'écrit avec 4 chiffres en base 4, et avec 6 chiffres en base 3 ?
Trouver toutes les valeurs possibles de N.

Exercice 3
On s'intéresse dans cet exercice à des patrons incomplets de cônes de révolution (il manque le disque qui est la base du cône). Il s'agit donc de secteurs angulaires qui ont tous en commun un rayon de 5 cm, et ne diffèrent que par la mesure a de l'angle, exprimée en degrés.



Calculer le rayon de la base du cône quand a = 90, quand a = 240, quand a = 216.
Pour cette dernière valeur, calculer également le volume du cône.

Didactique 1



L'exercice ci-contre est proposé dans le fichier de CE1 «la clé des maths» (éditions Belin, 2008) comme entraînement, l'objectif annoncé étant «comparer des longueurs à l'aide d'un étalon».
Indiquer trois défauts inhérents à ce document et proposer des améliorations possibles du travail demandé aux élèves.

Exercice 4
On dispose de deux types de wagons.
Les wagons A ont une longueur de 13,5 m. Les wagons B ont une longueur de 16,2 m.
Deux trains (auxquels on n'a pas encore attelé de locomotive) sont constitués exclusivement de wagons A pour l'un, de wagons B pour l'autre. Ces deux trains ont la même longueur. Quelle est la plus petite longueur possible de ces trains ?
Un train constitué de 16 wagons d'un mélange des deux types a une longueur de 243 m.
Combien de wagons de chaque type contient-il ?

Exercice 5
Construire un triangle ABC tel que la médiane issue de A mesure 6 cm, la médiane issue de B mesure 9 cm, et AB = 8 cm.

Exercice 6
Quels sont les nombres entiers (s'il y en a) qui ont pour reste 4 dans la division par 6 et pour reste 8 dans la division par 15 ?

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Didactique 2

Le travail décrit ci-dessous se déroule au premier trimestre dans une classe de CE2.

Il fait partie d'une séquence dont l'objectif final est l'acquisition de la technique de la multiplication posée de deux nombres entiers (de deux chiffres).

Lors de séances précédentes, les élèves ont appris que l'écriture 7 x 8 désigne le nombre de carreaux d'une grille rectangulaire de 7 carreaux sur 8.

Dans la séance étudiée, ils doivent déterminer le nombre de carreaux contenus dans trois rectangles tracés sur papier quadrillé.

Le travail est individuel, et suivi d'une phase de synthèse collective après chaque rectangle.

Les dimensions des rectangles, en carreaux, sont respectivement 15 x 4, 17 x 7 et 12 x 14.

Chaque enfant dispose d'une feuille sur laquelle sont tracés les rectangles et de cette table de Pythagore qui a été élaborée collectivement dans les séances précédentes :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

1. Discuter l'intérêt de fournir aux élèves la table de Pythagore par rapport aux alternatives suivantes :
   a) Les élèves disposent d'une calculatrice.
   b) Les élèves n'ont ni calculatrice ni table.

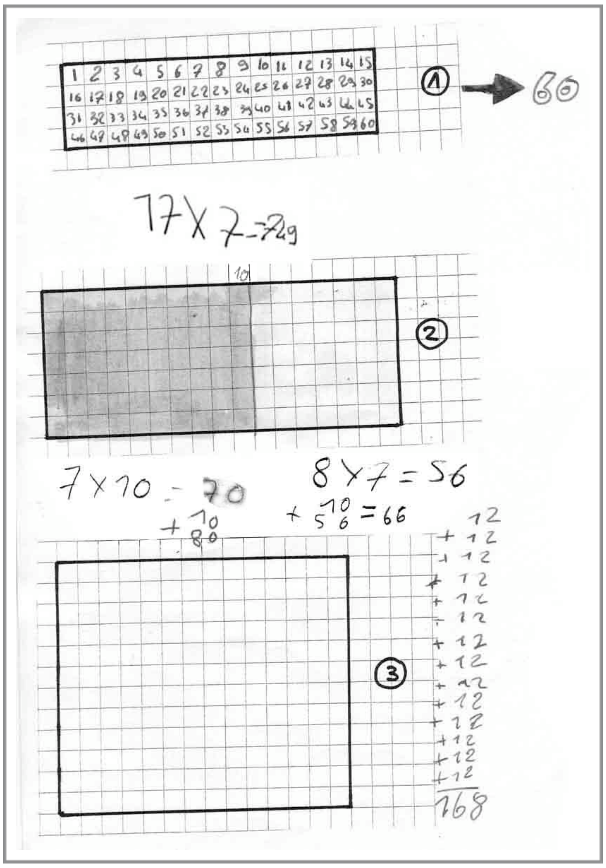
2. Décrire deux procédures, autres que celles visibles sur les productions d'élèves fournies, qui auraient pu être utilisée pour déterminer le nombre de cases du premier rectangle.

3. Donner des hypothèses expliquant pourquoi l'élève A change de procédure pour chaque rectangle.

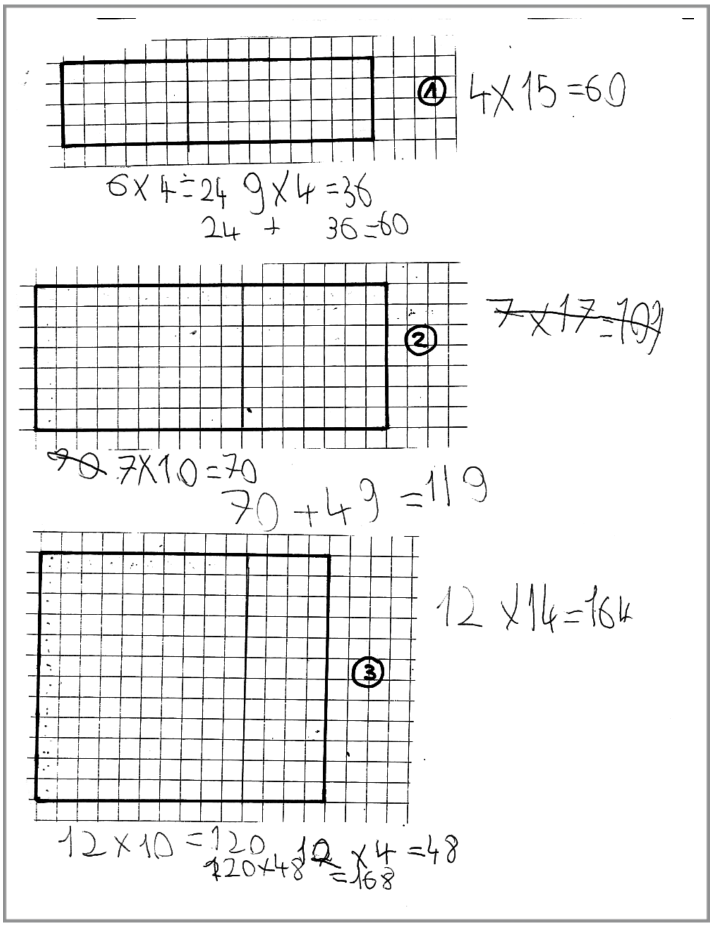
4. Analyser les erreurs et les réussites du même élève pour le deuxième rectangle.

5. Relever les compétences dont témoigne la production de l'élève B.

élève A

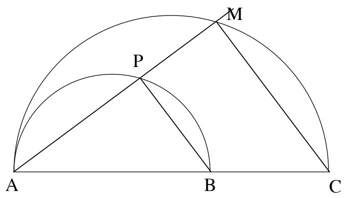


élève B



Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Corrigé de la feuille de bachotage 7

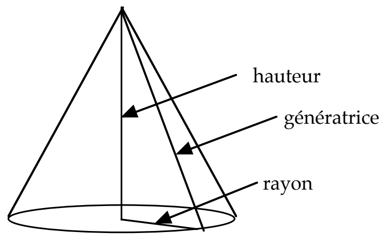


Exercice 1
P est un point du cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABP est rectangle en P, et on a :
$PB^2 = AB^2 - AP^2 = 100 - 64 = 36$, d'où BP = 6.

M est un point du cercle de diamètre [AC], donc le triangle AMC est rectangle en M.
Les droites (PB) et (MC) sont perpendiculaires à (AM), donc elles sont parallèles entre elles.
Dans le triangle AMC, le point P est sur (AM), B est sur (AC) et (PB) est parallèle à(MC), on a donc :
$\frac{AM}{AP} = \frac{AC}{AB} = \frac{MC}{PB}$ d'où on tire : $AM = \frac{AC}{AB} \times AP = 12,8\ cm$ et $MC = \frac{AC}{AB} \times PB = 9,6\ cm$
BPMC est un trapèze rectangle, son aire est égale à PM x (PB + MC) / 2 c'est à dire
4,8 x (6 + 9,6) /2 = 2,4 x 15,6 = 37,44. L'aire de BPMC mesure 37,44 cm^2.
On peut aussi l'obtenir par différence des aires de deux triangles.

Exercice 2
N s'écrit avec quatre chiffres en base 4 donc $4^3 \leq N < 4^4$ soit $64 \leq N < 256$
N s'écrit avec six chiffres en base 3 donc $3^5 \leq N < 3^6$ soit $243 \leq N < 729$
En comparant les deux conditions on constate que les nombres N qui conviennent sont tous les entiers de 243 à 255 inclus.

Exercice 3
La solution de cet exercice repose principalement sur deux idées :
La longueur de l'arc de cercle du secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle.
Le périmètre du disque de base du cône est égal à la longueur de l'arc de cercle du secteur.



Pour un secteur de 360°, c'est à dire un disque complet, la longueur de l'arc serait 10 π
Pour un secteur de 90° elle est donc de 2,5 π.
Pour un secteur de 240° elle est de 10 π x 240/360 = 20/3 π
Pour un secteur de 216° elle est de 10 π x 216/360 = 6 π

Si on note r le rayon du disque de base et p son périmètre, on a $r = p / (2\pi)$
Les rayons obtenus pour les bases sont alors respectivement 1, 25 cm 10/3 cm et 3 cm.

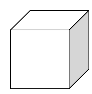
Dans un cylindre de révolution, le pied de la hauteur est le centre du cercle de base.
La hauteur forme avec un rayon et une génératrice un triangle rectangle dont la génératrice est l'hypoténuse.
La génératrice mesure 5 cm et le rayon 3 cm, on en déduit que la hauteur mesure 4cm.

Le volume du cylindre s'obtient alors par : $V = \pi r^2 h / 3 = \pi \times 3^2 \times 4 / 3 = 12 \pi\ cm^3$

Didactique 1
- La détermination de l'arbre le plus proche se fait facilement à vue, elle ne nécessite pas l'emploi d'un étalon.

modifications proposées : augmenter le nombre de segments à comparer, choisir les longueurs est la disposition de façon que la comparaison purement perceptive soit difficile, demander de ranger par ordre longueur (et pas seulement le plus court).
- l'étalon proposé n'est pas un objet, mais un trait sur le dessin, il est donc difficile de le reporter (sauf à savoir déjà mesurer mais alors l'objectif poursuivi n'a plus d'intérêt). De plus, si l'élève prend l'initiative de découper une bande de papier de la même longueur que le segment proposé, la faible longueur de celui-ci rend la manipulation difficile.

modifications proposées : fournir un étalon matériel à découper (tous les élèves ont le même) ou suggérer l'utilisation d'un objet personnel (gomme, capuchon de stylo), ce qui devrait permettre à tous d'obtenir les mêmes comparaisons malgré des nombres d'étalons différents.
- Le document induit l'idée qu'on peut comparer les dimensions d'objets de l'espace en comparant dimensions sur une représentation plane, ce qui est faux. Selon cette conception, les arêtes de ce cube n'ont pas toutes la même longueur, de même que les diagonales de ses faces.



modifications proposées : faire comparer des segments sur une figure qui ne représente pas une situation de l'espace ou bien faire comparer des dimensions d'objets réels (la longueur du bureau, la largeur d'une fenêtre…)

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

- Plus accessoirement, l'étalon présenté comme un pas ne correspond pas du tout à un pas du personnage dessiné. La longueur d'un pas se prend en effet de l'arrière d'une empreinte de pied à l'arrière de l'empreinte suivante (ou de l'avant à l'avant).

modifications proposées : faire comparer des longueurs de l'ordre de la dizaine de mètres dans la cour de l'école à l'aide des pas des enfants. Cela suppose de s'entraîner à avoir un pas régulier et met en évidence la précision toute relative de la méthode, ce qui peut être une motivation pour l'introduction de la mesure à l'aide d'unités conventionnelles.

Exercice 4

Les wagons A mesurent 135 dm, les wagons B mesurent 162 dm.
La mesure en dm des deux trains est donc un multiple commun à 135 et 162, et la plus petite valeur possible est leur ppcm.
$135 = 3^3 \times 5$ $162 = 2 \times 3^4$ Le ppcm de 135 et 162 est donc $2 \times 3^4 \times 5$.
La plus petite longueur possible est 810 dm, soit 81 m.

$243 = 3 \times 81$. De plus, 81 m est la longueur de 6 wagons A, ou celle de 5 wagons B
On peut alors remarquer que si on met bout à bout 10 wagons B et 6 wagons A, on obtient un train de 16 wagons de longueur 243 m. *Il n'y a pas d'autre solution, car le nombre de wagons étant constant, si on remplace certains wagons A par des wagons B (ou des wagons B par des A), la longueur totale est modifiée.*

Exercice 5

Il est nécessaire de faire un croquis à main levée et de reporter dessus les données.
Soit G le centre de gravité du triangle ABC (point d'intersection des médianes), il est situé au deux tiers de chaque médiane en partant du sommet, on a donc AG = 4 cm, et BG = 6 cm.
Il est alors aisé de construire le triangle ABG, puis de placer les milieux de [AC] et de [BC], et enfin C.

Exercice 6

Soit p un nombre ayant pour reste 4 dans la division par 6 et 8 dans la division par 15
On a donc : $p = 6m + 4 = 3 \times 2m + 3 + 1 = 3(2m + 1) + 1$ où m est un entier naturel
et $p = 15n + 8 = 3 \times 5n + 3 \times 2 + 2 = 3(5n + 2) + 2$ où n est un entier naturel.
La première ligne indique que le reste dans la division de p par 3 est 1, la seconde que le reste de la division de p par 3 est 2.
Il n'y a donc aucun nombre p qui satisfasse simultanément les deux conditions.

Didactique 2

1. Si les enfants n'ont ni calculatrice ni table, les résultats non mémorisés seront difficiles à obtenir et les procédures attendues ne seront pas plus efficaces que les procédures par comptage. S'ils ont une calculatrice, ils peuvent calculer directement le nombre total de carreaux.
2. Les élèves peuvent procéder par additions réitérées de 4 ou de 15. Ils peuvent effectuer un découpage en rectangles tous identiques (de 4 x 3 carreaux par exemple) puis faire des additions réitérées. Ils peuvent entourer des groupes de 10 carreaux et s'appuyer ensuite sur la connaissance de l'écriture décimale des nombres. Ils peuvent calculer le nombre de carreaux dans un demi-rectangle (découpage horizontal) en effectuant 15 + 15 = 30, puis 30 + 30 = 60 pour trouver le nombre total de carreaux.
3. Le découpage en deux parties du rectangle pour l'exercice 2 est probablement une tentative d'utiliser ce qui a été montré par le maître ou d'autres élèves lors de la première mise en commun. Cette tentative n'ayant pas abouti, l'élève A l'abandonne pour le troisième rectangle et revient à une méthode plus solide pour lui, mais cependant plus élaborée que le comptage des carreaux utilisé pour le premier rectangle.
4. Réussites de l'élève A pour le deuxième rectangle : il traduit correctement le nombre cherché par le produit 17x7, il utilise correctement la table de Pythagore pour trouver la valeur de 8 x 7, détermine correctement les dimensions du morceau de gauche de son découpage et trouve le résultat de 7 x 10. Les ajouts de 10 (non pertinents) sont effectués correctement.
   Erreurs : 17 x 7 est effectué en juxtaposant les produits par 7 du chiffre des dizaines et de celui des unités. Une des dimensions du carré de droite est estimée à 8 au lieu de 7. le nombre 10 est ajouté à chacun des produits partiels sans que l'on puisse donner une signification à ces sommes (probablement une tentative d'utiliser des indices de surface recueillis pendant la mise en commun). la somme des deux résultats partiels n'est pas faite, et il n'y a aucun lien entre ces résultats partiels et le produit écrit par ailleurs.
5. L'élève B sait traduire par une multiplication le nombre de cases d'une grille rectangulaire, il sait trouver des résultats multiplicatifs dans la table de Pythagore (peut-être certains sont-ils déjà mémorisés), effectuer des additions en ligne, multiplier un entier par 10 (y compris 12 x 10 qui est plus difficile que 7 x 10), effectuer mentalement certaines multiplications simples (12 x 4)

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.