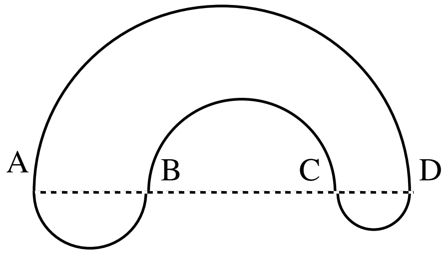
Bachotage 8

Exercice 1
On considère trois points A B et C non alignés.
- Construire au compas seul (donc sans règle) le point D, symétrique de A par rapport à (BC).

E est un point qui n'appartient ni à (BC) ni à (AD), ni aux parallèles à (BC) passant par A ou D. Justifier la construction.
- Construire en utilisant exclusivement la règle non graduée le point F, symétrique de E par rapport à (BC). Justifier.

Exercice 2
On considère une figure fermée formée de quatre demi-cercles disposés comme l'indiquent le figure ci-contre.
B et C sont des points quelconques du segment [AD].
Le périmètre de la figure est-il égal à celui du cercle de diamètre [AD] ? Justifier.
Son aire est-elle égale à celle du demi-disque de diamètre [AD] ? Justifier.



Exercice 3
Montrer qu'il n'existe pas de nombre entier dont le carré se termine par 19.

Didactique 1 : Utilisation de la calculatrice en classe.
1. Un maître de cycle 3 propose à ses élèves de s'aider de la calculatrice pour effectuer les opérations suivantes. Les calculatrices dont disposent les élèves ne peuvent afficher que 8 chiffres.

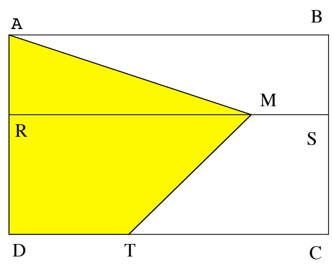
Quel est l'objectif du maître qui propose cet exercice ?
Analyser l'apport particulier de chacune des trois opérations proposées.
564 000 352 + 214 000 789　　　612 134 056 + 378 241　　　469 768 957 + 358 689 768

2. Rédiger une notice expliquant à un élève de Cycle 3 comment trouver le quotient et le reste d'une division euclidienne à l'aide d'une calculatrice du même type.

3. Un maître de cycle 3 propose à ses élèves l'exercice suivant :

Affichez sur votre calculatrice le nombre 85. A partir de ce nombre, en effectuant au maximum trois opérations, atteignez 812.
Le même exercice est repris plusieurs fois, en changeant le de départ et le nombre cible, et en comparant à chaque fois les prodédures proposées.
Quel est l'intérêt de cet exercice ?
Un élève propose la procédure suivante : 85 - 85 = 0 puis 0 + 812 = 812. Le maître fait remarquer que cette procédure est parfaite puis annonce qu'elle est interdite pour les opérations suivantes car on peut toujours faire comme ça sans chercher.
Le même élève propose alors , pour passer de 49 à 617, 49 + 617 = 666 puis 666 -49 = 617. Comment le maître doit-il selon vous traîter cette réponse.

Exercice 4
On considère une rectangle ABCD tel que AB = 8 cm et AD = 5 cm.
R est le point de [AD] tel que AR = 2 cm. T est le point de [CD] tel que DT = 3 cm.
La parallèle à (AB) passant par R coupe (BC) en S.
M est un point quelconque du segment [RS], on note x la mesure de RM en cm.
Calculer l'aire du quadrilatère AMDT dans le cas ou x = 5.
Représenter sur un même graphique l'aire de AMDT et celle de ABCTM, en utilisant les échelles suivantes : Sur l'axe des ordonnées, 1cm représente 5 cm², sur l'axe des abscisses 1 cm représente 1 cm.
Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle les deux aires sont égales, et retrouver ce résultat par le calcul.



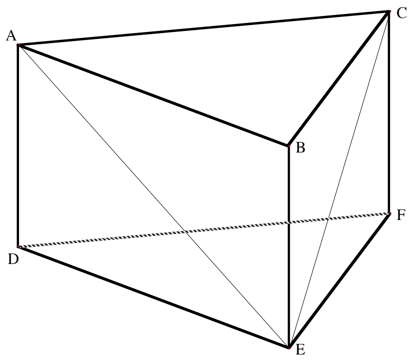
Existe-t-il une valeur de x pour laquelle les trois quadrilatères AMDT, ABSM et MSCT ont des aires égales ?

Exercice 5
Dans un sac de billes, les billes sont toutes d'une des trois couleurs suivantes : rouge, bleu, vert.
Un tiers des billes sont rouges, deux cinquième des billes sont vertes, et il y a 9 billes rouges de plus que de billes bleues. Quel est le nombre total de billes dans le sac ?

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

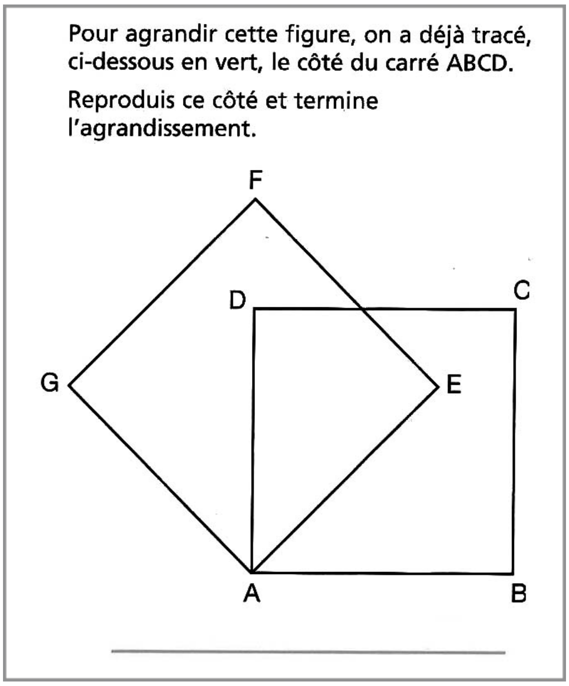
Exercice 6
Deux commerçants constatent qu'ils vendent le même article avec une différence de prix de 120€.
Sans ce concerter (car cela serait illégal), l'un des commerçants augmente son prix de 10% tandis que l'autre baisse le sien de 5%. L'article en question se retrouve alors vendu au même prix dans les deux boutiques. Calculer ce nouveau prix.

Exercice 7
ABCDEF est un prisme droit. Sa base ABC est un triangle rectangle en B.
On a AB = 8 cm, BC = 6 cm, et BE = 4 cm.
On coupe ce prisme en deux parties selon le plan AEC.
Calculer le volume de la pyramide ADFCE.



Exercice 8
Quel est le plus grand nombre premier strictement inférieur à 400 ?

Didactique 2
Le document ci-contre est extrait du manuel «Euro Maths» (éditions Hatier, 2009).
Sur le document original, Le carré ABCD a des côtés de 4 cm et le trait vert mesure 6 cm.
Analyser cet exercice pour en dégager l'intérêt éventuel. vous vous refererez à l'extrait suivant des programmes de 2008 pour le cycle 3 :
- agrandissement et réduction de figures planes, en lien avec la proportionnalité.



Correction des exercices de la feuille de bachotage n° 8

Exercice 1

Programme de construction de D :

Tracer les cercles de centre B et C qui passent par A.

L'autre point commun de des deux cercles est le point D cherché.

Justification :

A et D sont sur un même cercle de centre B, donc BA=BD, donc B est sur la médiatrice de [AD].

A et D sont sur un même cercle de centre C, donc CA=CD, donc C est sur la médiatrice de [AD].

B et C sont sur la médiatrice de [AD] donc (BC) est la médiatrice de [AD] ce qui revient à dire que A et D sont symétriques par rapport à (BC).

Programme de construction de F :

Soit X l'intersection de (BC) et (DE). Soit Y l'intersection de (BC) et (AE).

Le point F cherché est l'intersection des droites (AX) et (DY).

Justification :

dans la symétrie d'axe (BC), le symétrique de D est A, le symétrique de X est X, donc le symétrique de (DX) est (AX).

Le point E étant sur (DX), le symétrique de E est donc sur le symétrique de (DX), ce qui revient à dire que F est sur (AX)

On démontre de la même fçon que F est sur (DY), c'est donc l'intersection de (AX) et (DY).

Exercice 2

L'aire n'est en général pas égale à celle du demi-disque de diamètre [AD]

Si par exemple B est très proche de A et C très proche de D, l'aire de la figure est nettement inférieure à celle du demi-disque.

Le périmètre de la figure est égal à $\frac{\pi}{2}AB + \frac{\pi}{2}BC + \frac{\pi}{2}CD + \frac{\pi}{2}AD = \frac{\pi}{2}\left(AB + BC + CD\right) + \frac{\pi}{2}AD = \frac{\pi}{2}AD + \frac{\pi}{2}AD = \pi AD$

Il est donc égal au périmètre du cercle de diamètre [AD].

Exercice 3

Pour que le carré d'un nombre entier se termine par 9, il faut que le nombre se termine par 3 ou 7.

- Considérons un nombre entier n de la forme 10 a + 3 (où a est un entier naturel quelconque).

$$n^2 = \left(10a + 3\right)^2 = 100a^2 + 60a + 9 = 10(10a^2 + 6a) + 9$$

le nombre de dizaines dans n² est alors $10a^2 + 6a$, qui est un nombre pair, donc n² ne peut pas se terminer par 19.

- Considérons un nombre entier n de la forme 10 a + 7 (où a est un entier naturel quelconque).

$$n^2 = \left(10a + 7\right)^2 = 100a^2 + 140a + 40 + 9 = 10(10a^2 + 14a + 4) + 9$$

le nombre de dizaines dans n² est alors $10a^2 + 14a + 4$, qui est un nombre pair, donc n² ne peut pas se terminer par 19.

- Il n'existe donc aucun entier dont le carré se termine par 19.

Autre solution :

- Soit n un entier dont le chiffre des unités est 3 et le chiffre des dizaines d. soit *x* le chiffre des unités du produit de 3 par d. La partie de droite de l'algorithme usuel de la multiplication de n par n est représenté ci-dessous. Le chiffre des dizaines du produit est égal au chiffre des unités de 2*x*, il est donc pair et ne peut pas être égal à 1.
- Soit n un entier dont le chiffre des unités est 7 et le chiffre des dizaines d. soit *y* le chiffre des unités du produit de 7 par d. La partie de droite de l'algorithme usuel de la multiplication de n par n est représenté ci-dessous. Le chiffre des dizaines du produit est égal au chiffre des unités de 2*y* + 4, il est donc pair et ne peut pas être égal à 1.

$$\begin{array}{rr}
\ldots\ldots\ldots\ldots d & 3 \\
\times\ldots\ldots\ldots d & 3 \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots x & 9 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots x & \\
\hline
\ldots\ldots & 9
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d & 7 \\
\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots d & 7 \\
\hline
\ldots\ldots(y+4) & 9 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots y & \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 9
\end{array}$$

Didactique 1

1. L'objectif du maître est de faire travailler sur les grands nombres et les différentes décompositions possibles (en privilégiant probablement la décomposition selon les classes des unités, milliers, millions).

La première opération conduira probablement à calculer à la machine 564 + 214 (millions) et 352 + 789 (unités)
Son intérêt réside en particulier dans le fait que la somme 352 + 789 dépasse mille.
On ne peut donc pas recopier mécaniquement les trois zéros des nombres proposés dans le résultat.

Les deux nombres à additionner pour calculer la deuxième somme n'ont pas autant de chiffres. Il est intéressant de remarquer que si effectue à la machine 134 056 + 378 241, ce qui ne dépasse pas la capacité d'affichage, il suffit d'ajouter mentalement le résultat à 612 000 000 isolé mentalement pour obtenir la somme cherchée.
Un autre intérêt est de rappeler que la valeur des chiffres est donnée par leur position à partir de la droite (les deux autres exemples pourraient laisser croire qu'additionner les nombre formés par les trois chiffrres de gauche a du sens).

La troisième somme permet des stratégies variées (additionner classe par classe, traiter à part la classe des millions, traiter à part la classe des unités voire d'autres découpages). Par ailleurs quelque soit la méthode choisie, le problème de la retenue se pose.

2. Pour trouver le quotient et le reste de la division de 731 par 19 avec ta calculatrice.
pose 731 : 19
La calculatrice affiche 38,47368
Conserve la partie avant la virgule. 38 est le quotient de la division de 731 par 19.
Pour trouver le reste, calcul 731 - (38 x 19).

Un mode d'emploi acceptable doit être assez court, ne pas utiliser de notion inconnue des élèves (partie entière, notation algébrique…) et comporter au moins un exemple.

3. L'intérêt de l'exercice est de faire travailler le calcul mental réfléchi (et probablement en particulier les ordres de grandeur).

Cette réponse est dans le même esprit que la précédente : il s'agit de trouver une procédure qui marche à tous les coups sans avoir à se soucier des particularités des nombres proposés. Le maître peut donc traîter cette procédure comme la précédente : l'accepter pour le calcul en cours puis la mettre «hors jeu». Il peut en profiter pour faire remarquer à toute la classe la règle mathématique utilisée implicitement par cet élève : si je dois ajouter un nombre et en soustraire un autre, le résultat est le même que je commence par l'addition ou par la soustraction (sous réserve qu'il soit possible de faire la soustraction en premier à l'école élémentaire).

Exercice 5

5/15 des billes sont rouges, et 6/15 sont vertes, par conséquent 4/15 sont bleues
Les neuf billes rouges supplémentaires par rapport aux bleues représentent donc 1/15 du total, il y a donc en tout 9 x 15 = 135 billes.

Exercice 6

Soit p le prix le moins cher dans la situation initiale.
On a 1,10 p = 0,95 (p + 120), on en tire 1,10 p = 0,95 p + 114, d'ou 0,15p = 114 et p = 760.
Le prix initial le moins cher étant de 760 €, le prix commun est de 760 x 1,10 = 836 €.

Exercice 7

La pyramide ADFCE peut être obtenue en enlevant la pyramide ABCE du prisme droit ABCDEF.
Le volume du prisme est $\frac{6 \times 8}{2} \times 4 = 96 cm^3$. Celui de la pyramide ABCE est $\frac{1}{3}\left(\frac{6\times 8}{2}\times 4\right) = 32 cm^3$.
Par conséquent le volume de la pyramide ADFCE est de 96 – 32 = 64 cm^3.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Il était également possible de calculer l'aire de la base de ADFCE, qui est le rectangle ACFD.
Cette aire mesure 40 cm^2.
Il faut ensuite déterminer la mesure de la hauteur de la pyramide, qui est aussi la hauteur issue de E du triangle DFE. Si on appelle h cette hauteur l'aire du triangle DEF peut se calculer de deux façons différentes, ce qui donne DF x 10 / 2 = 6 x 8 / 2 d'où DF = 4,8
Le volume est alors égal à 40 x 4,8 / 3 = 64 cm^3.

Exercice 8
399 = 3 x 133, il n'est pas premier. 398 est pair, il n'est pas premier.
397 n'est divisible ni par 2 ni par 3 ni par 5, ni par 7 (car 56 x 7 = 392) ni par 11 (car 36 x 11 = 396) ni par 13 (car 30 x 13 = 390) ni par 17 (car 23 x 17 = 391) ni par 19 (car 20 x 19 = 380).
Si 397 n'était pas premier, il aurait donc au moins deux diviseurs supérieurs à 20 d'après ce qui précède, or 20 x 20 > 400, c'est donc impossible. Par conséquent, 397 est le plus grand nombre premier inférieur à 400.

Didactique 2
L'intérêt de cet exercice est de faire observer puis utiliser pour le tracer certaines propriétés géométriques du carré et de la figure proposée, en particulier :
AEFG est un carré bien que ses côtés ne soient pas parallèles aux bords de la feuille.
Les côtés d'un carré sont égaux et ses angles sont droits.
Les points A, E et C sont alignés (ainsi que A, D et F mais ces l'usage de cet alignement est moins probable).

Concernant l'agrandissement, les élèves doivent utiliser implicitement le fait qu'il conserve toutes les propriétés ci-dessus (égalités de longueurs, perpendicularité, alignement).
En revanche il est peu probable qu'ils utilisent la proportionnalité (aspect de l'agrandissement mis en avant par les programmes). C'est cependant possible pour placer E et F sur les droites (AC) et (AD) en multipliant les longueurs mesurées sur la figure modèle par 1,5.