bachotage 9

Exercice 1

Une voiture parcours 150 km.
Elle effectue une première partie du trajet à la vitesse moyenne de 80 km/h.
On notera x la longueur de cette partie, exprimée en km. x est compris entre 0 et 100.
Suite à un incident mécanique, une deuxième partie du trajet, de longueur égale à la moitié de la première partie, est effectuée à la vitesse de 40 km/h. Enfin, la fin du trajet est effectuée à 20 km/ h.

- On note t(x) la durée du trajet, mesurée en heures. Exprimer t(x) en fonction de x.
- Représenter graphiquement la fonction t dans un repère orthogonal (on prendra comme échelle 1 cm pour 10 km et 1,5 cm pour une heure).
- Utiliser le graphique ou le calcul pour répondre aux questions suivantes. Les réponses approchées sont acceptées à conditions qu'elles soient clairement signalées comme telles.
  - Le trajet total a duré 4 heures, quelle distance la voiture avait-elle parcouru au moment où elle a dû réduire une première fois sa vitesse ?
  - L'incident mécanique est survenu après 85 km, quelle a été la durée totale du trajet.
  - Le trajet a duré 5 h 20 min, pendant combien de temps la voiture a-t-elle roulé à 20 km/h ?
  - La voiture a parcouru 60 km à 20 km/ h, quelle a été la durée totale du trajet ?

Exercice 2

- On considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A.

Construire le cercle inscrit dans le triangle ABC. On nommera O le centre du cercle, A' le point commmun au cercle et à [BC], B' le point commun au cercle et à [AC] et C' le point commun au cercle et à [AB].
Démontrer que AB'OC' est un carré.

- On considère un cercle de centre P. Ecrire un programme de construction d'un triangle rectangle isocèle dans lequel ce cercle est inscrit. Démontrer que le triangle construit en suivant votre programme est bien isocèle rectangle.

Exercice 3

On considère les nombres entiers de cinq chiffres de la forme $\overline{abcba}$.
Parmi ces nombres :
Quel est le plus petit multiple de 9 ? Quel est le plus grand multiple de 25 ? Combien y a-t-il de multiples de 45 ?

Exercice 4

Ranger par ordre croissant les durées suivantes :

1,215 h 4375 s 72,8 min 1 h 12 min 53 s $\frac{11}{9}$ h $\frac{874}{12}$ min

Exercice 5

Pour vider une cave les pompiers emploient simultanément trois pompes.
La première pompe seule viderait la cave en 3 heures.
La deuxième pompe seule viderait la cave en 4 heures.
La troisième pompe seule viderait la cave en 6 heures.
En combien de temps la cave sera-t-elle vidée ?

Didactique L'activité suivante est extraite du manuel « Diagonale » CM2, éditions Nathan.

1. Donnez une explication susceptible d'être fournie par un élève de cycle 3, et qui relève d'une conception erronnée que vous préciserez.
2. Soit P le périmètre du cercle, donnez une justification à la fois mathématiquement correcte et compréhensible par des élèves de fin de cycle 3 pour l'une des deux inégalités suivantes :
   P < 4D 3D < P

1 Activité

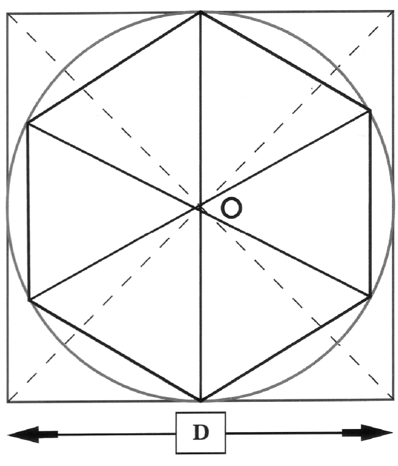
Voici comment a été dessinée cette figure :
a On a dessiné un carré de côté D de 6 cm.
Complète :
Le périmètre du carré est égal à ____ *fois* D.

b On a dessiné les deux diagonales qui se coupent en O puis on a tracé le cercle de centre O qui " touche " les côtés du carré.
Son diamétre est égal à D.

c En s'aidant du compas avec une ouverture égale à 3 cm, on a dessiné l'hexagone régulier de côté 3 cm.
Complète :
Le périmètre de cet hexagone est égal à ____ *fois* D.

Tu peux en déduire que le périmètre du cercle est compris entre 3 *fois* **D** (3 x **D**) et 4 *fois* **D** (4 x **D**).

Explique pourquoi.



Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Corrigé de la feuille de bachotage n° 9

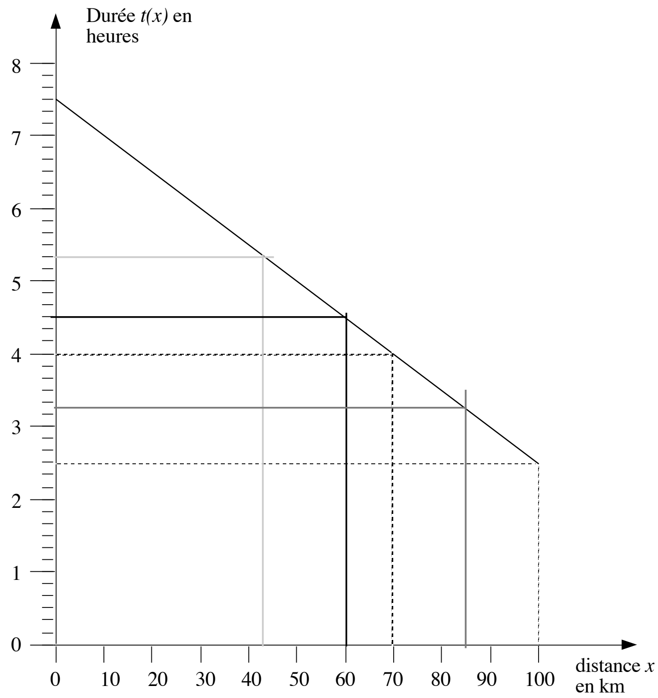
Exercice 1

Les longueurs respectives des trois parties du trajet sont x, $x/2$, et $150 - x - x/2$

Les durées correspondantes (en heures) sont donc : $\frac{x}{80}$, $\frac{x/2}{40}$ et $\frac{150 - x - x/2}{20}$ La durée totale est alors :

$$t(x) = \frac{x}{80} + \frac{x/2}{40} + \frac{150 - x - x/2}{20} = \frac{x}{80} + \frac{x}{80} + \frac{600-6x}{80} = \frac{600-4x}{80} = 7,5 - \frac{x}{20}$$

t est une fonction affine, sa représentation est donc une droite.
Pour la tracer, on peut utiliser les points qui représentent t(0) = 7,5 et t(100) = 2,5.



- Si le trajet a duré en tout 4 heures, la distance x à laquelle la voiture a réduit sa vitesse est selon le graphique d'environ 70 km.

En utilisant l'expression de *t(x)* établie plus haut, on trouve :

$7,5 - \frac{x}{20} = 4$ d'où on tire $x = 70$

La distance cherchée est donc égale à 70 km.

- Si l'incident est survenu après une distance x de 85 km, la durée du trajet est selon le graphique d'environ 3 h 15 min.

En utilisant l'expression de *t(x)* établie plus haut, on obtient

$7,5 - \frac{85}{20} = 7,5 - 4,25 = 3,25$ soit exactement 3 h 15 min.

- Si le trajet a duré en tout 5 h 20 minutes, le graphique montre que la distance x est d'environ 43 km. La distance parcourue à 20 km/h est alors d'environ 85,5 km ce qui correspond à une durée d'un peu plus de 4 heures et quart.
  L*a conversion précise de 4,275 en heures minutes et secondes n'a pas d'intérêt puisque la distance 85,5 n'est qu'approchée*.

En utilisant l'expression de *t(x)* établie plus haut, on trouve :

$7,5 - \frac{x}{20} = 5 + \frac{1}{3}$; $450 - 3x = 300 + 20$; $3x = 130$; $x = \frac{130}{3}$

La distance parcourue à 20 km/ h est alors égale à $150 - \frac{130}{3} - \frac{65}{3} = \frac{255}{3}$

La durée en heures est alors égale à $\frac{255}{3}$ / 20 soit $\frac{255}{60}$ ce qui correspond à 255 min, ou 4 h 15 min exactement.

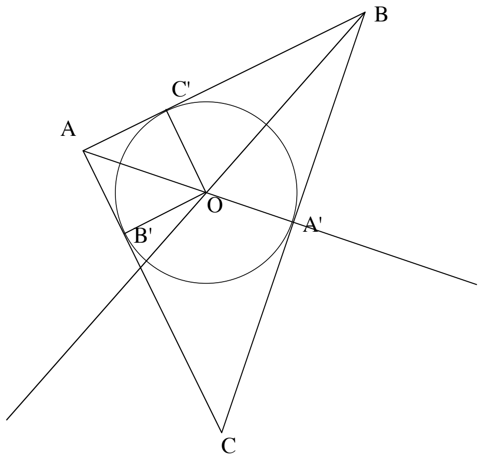
Si la voiture a parcouru 60 km à 20 km/h, elle en avait parcouru 90 auparavant, dont les deux tiers, c'est à dire également 60 km à 80 km/h.
Ce trajet correspond donc à une valeur de x de 60, ce qui permet de déterminer à l'aide du graphique que la durée totale est d'environ 4 h 30 min, ou par le calcul qu'elle est exactement de 4 h 30 min.

Exercice 2

Le cercle inscrit dans un triangle est tangent aux trois côtés du triangles.
Une tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon du cercle qui a pour extrémité le point commun au cercle et à la droite.
Il en résulte que les angles $\widehat{OC'A}$ et $\widehat{OB'A}$ sont droits. L'angle $\widehat{B'AC'}$ est également droit puisque ABC est rectangle en A.
Le quadrilatère AB'OC' a trois angles droits, c'est donc un rectangle.
[OB'] et [OC'] sont des rayons du même cercle, donc ils ont la même longueur.
Le rectangle AB'OC' a deux côtés consécutifs ([OB'] et [OC']) de même longueur, par conséquent c'est un carré.

Programme de construction :

- Construire deux rayons perpendiculaires, [PC'] et [PB']
- Construire A tel que PB'AC' soit un carré.
- La droite (AP) coupe le cercle en deux points, on appelle A' celui des deux qui n'est pas sur [AP]
- Construire la droite d, perpendiculaire à (AA') et passant par A'.
- Nommer B l'intersection de (AC') et d, C l'intersection de (AB') et d
- ABC est le triangle cherché.



PB'AC' est un carré, donc (AB') et (AC') sont perpendiculaires, or ces droites ne sont autres que (AC) et (AB). Le triangle **ABC est donc rectangle en A.**

Les diagonales d'un carré sont des axes de symétrie du carré, ce sont donc les bissectrices des angles droits, par conséquent les angles $\widehat{BAA'}$ et $\widehat{CAA'}$ mesurent 45°. Par ailleurs les triangles AA'B et AA'C sont rectangles par construction.
AA'B et AA'C sont deux triangles rectangles isocèles ayant un côté de l'angle droit en commun, ils sont donc isométriques, il en résulte que AB = AC, le triangle **ABC est donc isocèle en A**

Exercice 3
Les plus petits nombres de la forme sont ceux pour lesquels $a = 1$ et $b = 0$.
Parmi les nombres de la forme $\overline{10c01}$, seul 10701 est divisible par 9, c'est donc le nombre cherché.

Les nombres multiples de 25 se terminent par 00, 25, 50 ou 75.
Cependant, le dernier chiffre ne peut pas être 0 car, compte tenu de la forme $\overline{abcba}$ le nombre s'écrirait alors avec 4 chiffres seulement.
Les multiples de 25 de la forme $\overline{abcba}$ sont donc d'un des deux types suivants :
$\overline{52c25}$ ou $\overline{57c75}$ le plus grands de ces nombres est $\overline{57975}$

Les multiples de 45 sont les nombres qui sont à la fois multiples de 5 et de 9.
Pour la même raison qu'à la question précédente, les multiples de 5 cherchés ne peuvent pas se terminer par 0, mais seulement par 5, ils sont donc de la forme $\overline{5bcb5}$
Un nombre de cette forme est multiple de 9 si et seulement si 2b + c + 10 est multiple de 9
Autrement dit si 2b + c + 1 est multiple de 9.
Etudions systématiquement toutes les valeurs possibles de b et cherchons s'il existe des valeurs de c permettant de réaliser cette condition.

Valeur de b	2b + 1	Valeur(s) de c pour que 2b + 1 + c soit multiple de 9	Nombre obtenu
0	1	8	50805
1	3	6	51615
2	5	4	52425
3	7	2	53235
4	9	**0 ou 9**	**54045 et 54945**
5	11	7	55755
6	13	5	56565
7	15	3	57375
8	17	1	58185
9	19	8	59895

Il y a donc 11 multiples de 45 de la forme $\overline{abcba}$

Exercice 4
Pour comparer les durées en question, il faut les exprimer dans la même unité.
Nous choisisons ici de tout exprimer en secondes.
1,215 x 3600 s = 4374 donc 1,215 h = 4374 s
72,8 X 60 s = 4368 donc 72,8 min = 4368 s
12 min = 720 s. 3600 + 720 + 53 = 4373 donc 1 h 12 min 53 s = 4373 s

$\frac{11}{9}$ x 3600 = 11 x 400 = 4400, donc $\frac{11}{9}$ h = 4400 s.

$\frac{874}{12}$ x 60 = 874 x 5 = 4370, donc $\frac{874}{12}$ min = 4370 s.

En comparant ces différents résultats, on obtient le rangement suivant :

$$72{,}8 \text{ min} < \frac{874}{12} \text{ min} < 1 \text{ h } 12 \text{ min } 53 \text{ s} < 1{,}215 \text{ h} < 4375 \text{ s} < \frac{11}{9} \text{ h}$$

Exercice 5

En 12 heures :

La première pompe seule viderait 4 caves (car 12 heures = 4 x 3 heures)

La deuxième pompe seule viderait 3 caves.

La troisième pompe seule viderait 2 caves.

Les trois pompes simultanément videraient donc 9 caves en 12 heures.

Le nombre d'heures nécessaire pour vider une cave est donc 12/9 ou 4/3, ce qui correspond à une heure et 20 minutes.

***Remarque** : cette méthode purement arithmétique se base principalement sur l'idée que les raisonnements sur les vitesses ou les débits sont toujours plus faciles en se ramenant à une même durée.*

Le fait de choisir comme durée commune 12 (ppcm de 3 4 et 6) est une astuce qui facilite le calcul, mais n'est pas fondamental dans le raisonnement. Le même raisonnement fonctionne très bien avec une heure (les pompes vident respectivement 1/3 1/4 et 1/6 de cave, ensemble elles vident donc 1/3 + 1/4 + 1/6 soit 9/12 de cave.

Didactique :

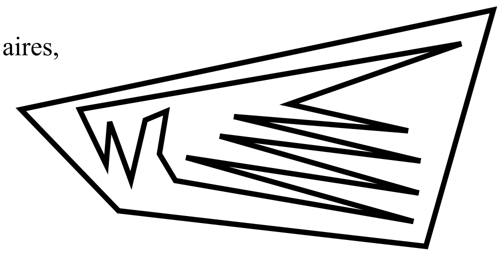
Un élève de cycle 3 peut raisonner ainsi (il y est d'ailleurs invité par les auteurs du manuel) :

Le périmètre de l'hexagone est 3D, celui du carré est 4D.

Comme le cercle contient entièrement l'hexagone, son périmètre est supérieur à 3D

Comme le cercle tient entièrement à l'intérieur du carré, son périmètre est infériur à 4D

La conclusion correcte que l'on peut tirer de l'inclusion des figures concerne les aires, et non les périmètres. le dessin ci-contre montre deux polygones, celui des deux qui a la plus grande aire a le plus petit périmètre.



Les élèves qui tiennent le raisonnement décrit ci-dessus s'appuient peut-être sur la conception fausse suivante : **Si une figure A à une aire plus grande que la figure B, elle a aussi un périmètre plus grand.**

Remarque : une conception est une idée attribuée à l'élève par l'observateur et qui permet d'expliquer la performance de l'élève : tout se passe comme si l'élève utilisait la propriété donnée en gras ci-dessus. Cela ne signifie pas que l'élève raisonne réellement et explicitement comme ça. Il est probable que l'élève considère plutôt qu'il y a une grande figure et une petite, grand et petit étant des caractéristiques intrinsèques de chaque figure qui s'appliquent alors à chacun des aspects auquel on s'intéresse (l'aire ou le périmètre par exemple).

On peut expliquer de la façon suivante l'inégalité 3D<P

Nommons ABCDEF l'hexagone régulier inscrit dans le cercle, il est constitué de 6 triangles équilatéraux, chacune de ses côtés est égal à un rayon du cercle.

La distance la plus courte pour aller du point A au point B est la longueur AB, c'est à dire le rayon du cercle la longueur de l'arc de cercle d'extrémités A et B est donc supérieure au rayon du cercle.

Il en est de même pour chacun des arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ … le périmètre du cercle est donc supérieur à 6 rayons soit 3 diamètres.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.