CRPE 2011-2012—derniers réglages avant l'écrit (1).

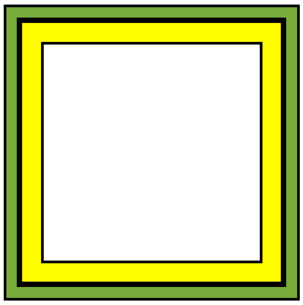
Problème 1
Le triangle ABC a les caractéristiques suivantes :
L'angle de sommet A mesure 70°.
L'angle de sommet B mesure 55°
La hauteur issue de A mesure 8 cm.
Calculer BC. On en donnera la valeur exacte et l'arrondi au centième de cm près.

Problème 2
Le nombre entier A a pour quotient 17 dans la division euclidienne par 45, il a pour quotient 21 dans la division euclidienne par 35.
Déterminer toutes les valeurs possibles de A.

Problème 3
En 1990, le village de Saint-André-treize-voies comptait 100 habitants de moins que celui de Saint-Sauveur-givre-en-mai.
Depuis lors, la population de Saint-André a augmenté de 20% et celle de Saint-Sauveur a diminué de 20%.
A la suite de ces évolutions, les deux villages ont maintenant le même nombre d'habitants.
Combien y avait-il d'habitants à Saint-André en 1990 ?

Problème 4
On colorie autour d'un carré une bande extérieure d'une largeur de 4 cm. On colorie à l'intérieur du même carré une bande d'une largeur de 5 cm.
Ces deux bandes ont la même aire.

Calculer la mesure du côté du carré.



Problème 5
Placer arbitrairement un point B et un point D puis construire en utilisant exclusivement la règle non graduée et le compas un quadrilatère ABCD vérifiant simultanément toutes les propriétés suivantes :
(AC) est un axe de symétrie de ABCD.
L'angle $\widehat{BCD}$ est droit.
L'aire du triangle BAD est égale à celle du quadrilatère ABCD.

Problème 6
On joue aux fléchettes en visant une cible.
Toute fléchette atteignant la cible fait marquer 5 points.
Toute fléchette hors de la cible fait perdre 3 points.

Est-il possible de marquer exactement un point en ayant lancé un nombre de fléchettes supérieur à 30 et inférieur à 40 ?

Problème 7
ABCD est un parallélogramme de centre O.
E est le symétrique de C par rapport à D. S est l'intersection de (AD) et (EO).
R est le milieu de [AE].
Démontrer que Les points R, S et C sont alignés.

Problème 8
Un marcheur parcourt trois fois de suite une même boucle.
Il effectue les deux premiers tours à 4 km/h et le troisième à 6 km/h.
Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?

Problème 9
On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes ordinaires.
Quelle est la probabilité que ces deux cartes soient de la même couleur ? Le mot «couleur», désigne ici une des quatre familles : «carreau», «trèfle», «pique» ou «coeur» et non le rouge ou le noir.

Problème 10
Combien y a-t-il de multiples de 37 s'écrivant avec 4 chiffres et dont le chiffre des unités est 8 ?

CRPE 2011-2012—derniers réglages avant l'écrit (1).
Problèmes corrigés.

Problème 1

Le triangle ABC a les caractéristiques suivantes :
L'angle de sommet A mesure 70°.
L'angle de sommet B mesure 55°
La hauteur issue de A mesure 8 cm.
Calculer BC. On en donnera la valeur exacte et l'arrondi au centième de cm près.

La somme des angles d'un triangle est de 180° donc l'angle de sommet C du triangle ABC mesure 55°.
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ étant égaux, le triangle ABC est isocèle en A.
Soit H le pied de la hauteur issue de A.
Dans le triangle rectangle ABH, on a : $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH}$

Il en résulte que $BH = \frac{AH}{\tan \widehat{ABH}} = \frac{8}{\tan 55°}$

ABC étant isocèle en A, la hauteur issue de A est également une médiane donc $BC = 2BH = \frac{16}{\tan 55°}$

La calculatrice permet de déterminer que l'arrondi au centième de centimètre près de BC est 11,20 cm.

Problème 2

Le nombre entier A a pour quotient 17 dans la division euclidienne par 45, il a pour quotient 21 dans la division euclidienne par 35.
Déterminer toutes les valeurs possibles de A.

Examinons indépendamment chaque critère :
Un nombre ayant pour quotient 17 dans la division euclidienne par 45, est égal à 17 x 45 + r (r pouvant valoir de 0 à 44). Pour satisfaire ce critère A peut donc valoir de 765 à 809.
Un nombre ayant pour quotient 21 dans la division euclidienne par 35, est égal à 21 x 35 + r' (r' pouvant valoir de 0 à 34). Pour satisfaire ce critère A peut donc valoir de 735 à 769.

Les valeurs de A satisfaisant les deux critères sont donc 765, 766, 767, 768 et 769.

Problème 3

En 1990, le village de Saint-André-treize-voies comptait 100 habitants de moins que celui de Saint-Sauveur-givre-en-mai.
Depuis lors, la population de Saint-André a augmenté de 20% et celle de Saint-Sauveur a diminué de 20%.
A la suite de ces évolutions, les deux villages ont maintenant le même nombre d'habitants.
Combien y avait-il d'habitants à Saint-André en 1990 ?

Soit a le nombre d'habitants à Saint-André en 1990.
Le nombre d'habitants à Saint-André est maintenant de 1,20 a.
Le nombre d'habitants à Saint-Sauveur était de a + 100 en 1990, il est aujourd'hui de 0,80 (a + 100).
Les deux villages ayant aujourd'hui le même nombre d'habitants, on a :

$$1{,}20a = 0{,}80(a+100)$$

$$1{,}20a = 0{,}80a + 80$$

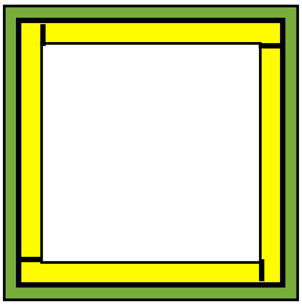
$$0{,}40a = 80$$

$$a = \frac{80}{0{,}40} = 200$$

Il y avait 200 habitants à Saint-André en 1990.

Problème 4

On colorie autour d'un carré une bande extérieure d'une largeur de 4 cm. On colorie à l'intérieur du même carré une bande d'une largeur de 5 cm.
Ces deux bandes ont la même aire.
Calculer la mesure du côté du carré.



Notons x la mesure en cm du côté du carré intérieur (la zone non coloriée).
En utilisant le découpage suggéré par le dessin ci-contre, l'aire de la zone coloriée intérieure est alors égale à $4 \times 5(x+5)$

L'utilisation d'un découpage analogue de la bande extérieure conduit à une aire de $4 \times 4(x+14)$

L'égalité des deux aires conduit à l'équation suivante :

$$4 \times 4(x+14) = 4 \times 5(x+5)$$

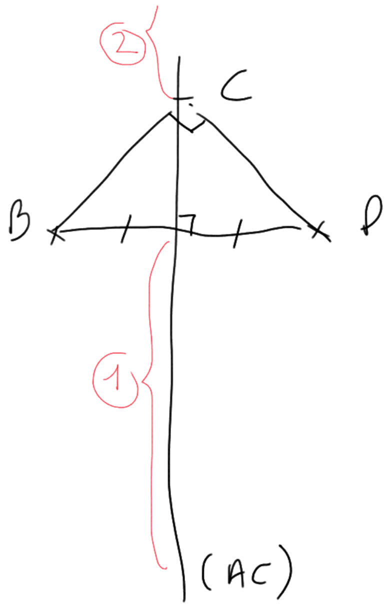
$$4x + 56 = 5x + 25$$

$$x = 31$$

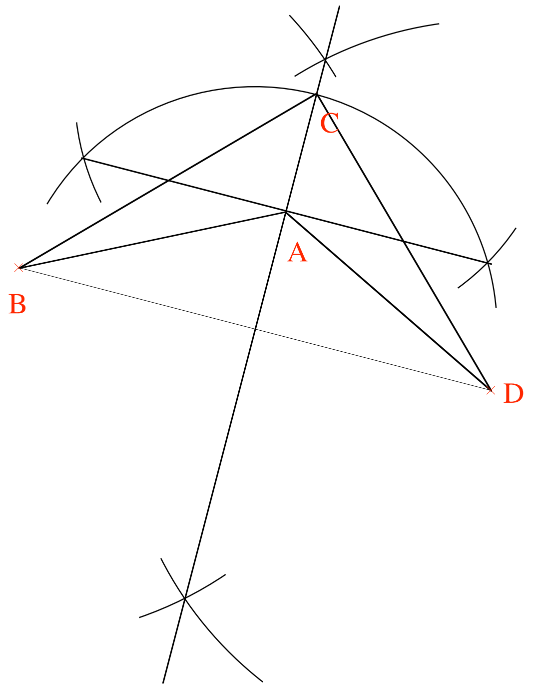
Le coté du carré intérieur mesure 31 cm, par conséquent le côté du carré d'origine mesure 41 cm.

Problème 5

Placer arbitrairement un point B et un point D puis construire en utilisant exclusivement la règle non graduée et le compas un quadrilatère ABCD vérifiant simultanément toutes les propriétés suivantes :
(AC) est un axe de symétrie de ABCD.
L'angle $\widehat{BCD}$ est droit.
L'aire du triangle BAD est égale à celle du quadrilatère ABCD.



Le schéma ci-contre est un brouillon. Le tracé de (AC), médiatrice de [BD] et le placement de C pour que l'angle $\widehat{BCD}$ soit droit ne posent pas de problèmes particuliers, mais ou faut-il placer le point A. Si on le place dans la partie notée ① de la droite (AC), l'aire de ABCD sera supérieure à celle de BAD, ce qui ne convient pas. Si on place A dans la partie notée ② l'aire de BAD sera supérieure à celle de ABCD. A ne peut donc être placé qu'à l'intérieur du triangle BCD, plus précisément au milieu du segment ayant pour extrémités C et le milieu de [BD].
La figure ci-dessous montre une construction possible :



Problème 6

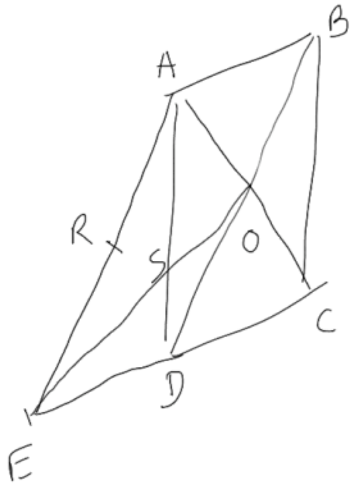
On joue aux fléchettes en visant une cible. Toute fléchette atteignant la cible fait marquer 5 points.
Toute fléchette hors de la cible fait perdre 3 points.
Est-il possible de marquer exactement un point en ayant lancé un nombre de fléchettes supérieur à 30 et inférieur à 40 ?

Une façon possible de marquer un point est de lancer deux fléchettes dans la zone qui ajoute 5 points et 3 dans la zone qui enlève 3. On a alors utilisé 5 fléchettes.
Si on lance 8 fléchettes réparties ainsi : 3 fléchettes dans la zone «+5» et 5 dans la zone «-3», le score total ne change pas. Il est donc possible d'avoir un score égal à 1 avec successivement 5, 13, 21, 29, 37 fléchettes, ce qui répond à la question.
On peut obtenir un score égal à un avec 37 fléchettes : 23 dans la zone «-3» et 14 dans la zone «+5»

Remarque : cette méthode ne permet pas d'assurer que la solution fournie est la seule possible.

Problème 7

ABCD est un parallélogramme de centre O.
E est le symétrique de C par rapport à D. S est l'intersection de (AD) et (EO).
R est le milieu de [AE].
Démontrer que Les points R, S et C sont alignés.



ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales ont le même milieu, O est par conséquent le milieu de [AC].
E est le symétrique de C par rapport à D donc D est le milieu de [EC].
Dans le triangle ACE :
O est le milieu de [AC] donc [EO] est la médiane issue de E.
D est le milieu de [EC] donc [AD] est la médiane issue de A.
Le point S est l'intersection de deux médianes du triangle ACE, c'est donc son centre de gravité, il est donc situé sur la troisième médiane qui est [RC] par conséquent les points R, S et C sont alignés.

Problème 8

Un marcheur parcourt trois fois de suite une même boucle.
Il effectue les deux premiers tours à 4 km/h et le troisième à 6 km/h.
Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?

Soit t la durée nécessaire pour parcourir une boucle à 4 km/h
la durée d'un trajet étant inversement proportionnelle à la vitesse, la durée pour parcourir une boucle à 6 km/h est égale à $\frac{2}{3}t$ et la durée pour l'ensemble du trajet est t + t + $\frac{2}{3}t = \frac{8}{3}t$

Si on parcourait une seule boucle à la même vitesse moyenne, la durée serait trois fois moindre soit $\frac{8}{9}t$

Utilisons une fois de plus le fait que la durée du trajet est inversement proportionnelle à la vitesse.
La vitesse est de 4 km/h pour une durée t, elle est donc égale à $\frac{9}{8} \times 4 \quad km / h$ pour une durée égale à $\frac{8}{9}t$, soit

4,5 km/h.

Remarque :
De nombreuses autres méthodes sont possibles, on peut par exemple s'appuyer d'avantage sur le calcul algébrique.
On peut aussi choisir un exemple pour la longueur de la boucle qui facilite le calcul (par exemple pour une boucle de 12 km, on fera les trois tours en 8 heures). Cependant le calcul à partir d'un exemple n'est correct que si on justifie par ailleurs que le résultat ne dépend pas de la longueur de la boucle.

Problème 9

On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 32 cartes ordinaires.
Quelle est la probabilité que ces deux cartes soient de la même couleur ? Le mot «couleur», désigne ici une des quatre familles : «carreau», «trèfle», «pique» ou «coeur» et non le rouge ou le noir.

Le fait que le tirage soit simultané ou non ne modifie pas la probabilité, à condition que l'on ne remette pas une carte avant de tirer l'autre.
Supposons que la première carte est tirée. il reste 31 cartes parmi lesquelles choisir la deuxième, dont 7 sont de la même couleur que la carte déjà tirée. La probabilité de tirer deux cartes de la même couleur est donc $\frac{7}{31}$.

Problème 10

Combien y a-t-il de multiples de 37 s'écrivant avec 4 chiffres et dont le chiffre des unités est 8 ?

En posant la division euclidienne de 1 000 par 37, on trouve que 1000 = 27 x 37 + 1
En posant la division euclidienne de 10 000 par 37, on trouve que 10 000 = 270 x 37 + 10

Les multiples de 37 s'écrivant avec 4 chiffres vont donc de 28 x 37 = 1 036 à 270 x 37 = 9 990.

En multipliant 7 successivement par tous les nombres de 0 à 9 (c'est à dire en récitant la «table de 7», on constate que le seul produit dont le chiffre des unités est 8 est 4 x 7 = 28.

Parmi les multiples de 37 s'écrivant avec 4 chiffres, ceux qui conviennent sont ceux obtenus en multipliant 37 par un nombre dont le chiffre des unités est 4.

Les multiplicateurs qui conviennent sont donc 34, 44, 54… 264.
Il y en a autant que d'entiers de 3 à 26, c'est à dire 26 - 3 + 1 ou 24.

Il y a 24 multiples de 37 s'écrivant avec 4 chiffres et donc le chiffre des unités est 8.