CRPE 2011-2012—derniers réglages avant l’écrit (3).

Problème 1

A et B sont deux points tels que AB = 6 cm.
On trace le cercle de centre A qui passe par B et le cercle de centre B qui passe par A.
Calculer l’aire de la zone commune aux deux disques.

Problème 2

La division euclidienne de 2500 par 63 a pour quotient 39 et pour reste 43.
Déduire de ce qui précède le quotient et le reste de chacune des divisions euclidiennes suivantes :

5000 : 63 2500 : 126 2500 : 31

Problème 3

Un segment [AB] de 4 cm étant donné, compléter la figure en utilisant exclusivement la règle non graduée et le compas afin d’obtenir un quadrilatère ABCD non croisé et ayant les propriétés suivantes :

$\widehat{ABC} = 120°$ $\widehat{ADC} = 90°$ BC = 8 cm AD = CD

Ecrire un programme correspondant à votre construction.

Problème 4

Pour aller de A à B, un train roule pendant une heure et demi à 60 km/h puis termine le trajet à 200 km/h.
La vitesse moyenne de ce train sur l’ensemble du trajet est de 100 km/h.
Quelle est la distance de A à B ?

Problème 5

	A	B	C	D
1		1	2	3
2	1			
3	2			
4	3			

Sans modifier les valeurs déjà inscrites dans cette feuille de tableur, on entre la formule **=B$1+A2** dans la cellule B2 puis on la recopie en tirant vers le bas et vers la droite.
Quelles valeurs s’afficheront alors dans les cellules de la zone encadrée ?

Problème 6 (annales de brevet)

Dans un collège, une enquête a été menée sur « le poids des cartables des élèves ».
Pour cela, on a pesé le cartable de 48 élèves du collège.
Les résultats de cette enquête sont inscrits dans le tableau ci-dessous:

Poids en kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	2	4	2	5	11	8	8	3	4

1. Calculer l'étendue de cette série statistique.
2. Déterminer la médiane de cette série statistique.
3. Déterminer, les valeurs du premier quartile et du troisième quartile de la série.

Problème 7
Dans un jeu de 10 cartes numérotées de 1 à 10 on tire une carte, on la remet dans le jeu, puis on tire à nouveau une carte.
Quelle est la probabilité que la valeur de la deuxième carte tirée soit supérieure à celle de la première carte ?

Problème 8
ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 3 cm et BC = 4 cm.
E est un point de [BC]. La parallèle à (AB) passant par E coupe (AC) en F.
A quelle distance de B faut-il placer le point E pour que les longueurs AF et EF soient égales ?

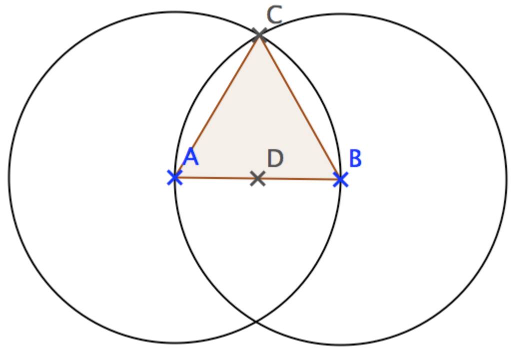
Problème 9 (d'après annales de brevet)
Un train est constitué, à l'aller, de deux locomotives identiques et de dix wagons-citernes du même modèle et ce train mesure alors 152 m de long. Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes vides.
Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160 m de long. On cherche la longueur d'une locomotive et la longueur d'un wagon-citerne.

Résoudre ce problème par une méthode arithmétique et par une méthode algébrique.

Problème 10
Le nombre entier A s'écrit avec trois chiffres, il est multiple de 6 et la somme de ses chiffres est égale à 6.
Déterminer toutes les valeurs possibles du nombre A

CRPE 2011-2012—derniers réglages avant l'écrit (3).
Problèmes corrigés.

Problème 1



A et B sont deux points tels que AB = 6 cm.
On trace le cercle de centre A qui passe par B et le cercle de centre B qui passe par A.
Calculer l'aire de la zone commune aux deux disques.

Soit C un des points communs aux deux cercles, et D le milieu de [AB].

La hauteur [CD] du triangle équilatéral ABC mesure $\frac{\sqrt{3}}{2}$ AB (ce résultat peut être connu ou retrouvé à l'aide du théorème de Pythagore appliqué au triangle ACD).

L'aire du triangle ABC, mesure donc $\frac{\sqrt{3}}{4}$ AB² soit $9\sqrt{3}$

L'aire du secteur de disque correspondant à l'arc $\overset{\frown}{BC}$ mesure $\frac{\pi \times AB^2}{6}$ soit 6π

La surface limitée par le segment [BC] et l'arc $\overset{\frown}{BC}$ mesure donc $6\pi - 9\sqrt{3}$

L'aire demandée est la somme des aires de 4 surfaces superposables à la précédente et de deux triangles équilatéraux, elle mesure donc $4\left(6\pi - 9\sqrt{3}\right) + 18\sqrt{3}$ soit $24\pi - 18\sqrt{3}$ cm²

Remarque : En l'absence de précision, c'est toujours la valeur exacte qui est attendue, et non une valeur approchée.

Problème 2

La division euclidienne de 2500 par 63 a pour quotient 39 et pour reste 43.
Déduire de ce qui précède le quotient et le reste de chacune des divisions euclidiennes suivantes :
5000 : 63 2500 : 126 2500 : 31

La division euclidienne de 2500 par 63 se traduit par l'égalité : 2500 = 39 x 63 + 43
On en déduit que :
5000 = 78 x 63 + 86 = 78 x 63 + 63 + 23 = 79 x 63 + 23.
La division euclidienne de 5000 par 63 a pour quotient 79 et pour reste 23.

2500 = 38 x 63 + 63 + 43 = 19 x 2 x 63 + 106 = 19 x 126 + 106.
La division euclidienne de 2500 par 126 a pour quotient 19 et pour reste 106.

2500 = 39 x 62 + 39 + 43 = 78 x 31 + 31 + 8 + 31 + 12 = 80 x 31 + 20
La division euclidienne de 2500 par 31 a pour quotient 68 et pour reste 19.

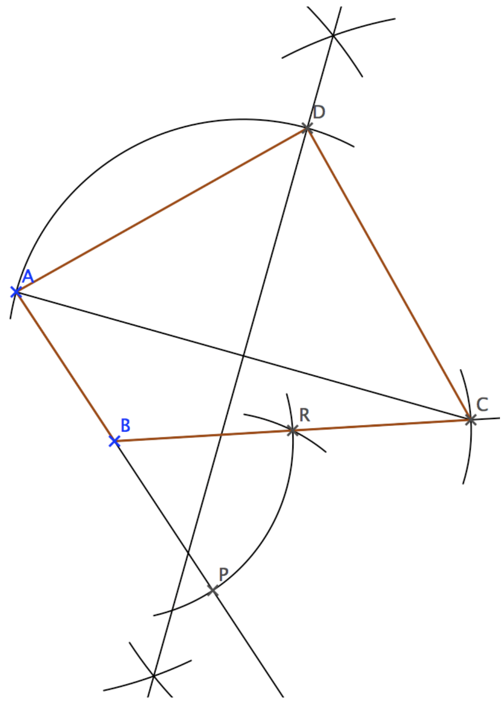
Problème 3

Un segment [AB] de 4 cm étant donné, compléter la figure en utilisant exclusivement la règle non graduée et le compas afin d'obtenir un quadrilatère ABCD non croisé et ayant les propriétés suivantes :
$\widehat{ABC}$ *= 120°* $\widehat{ADC}$ *= 90°* *BC = 8 cm* *AD = CD*
Ecrire un programme correspondant à votre construction.

La figure de la page suivante montre une des constructions possibles. Voici un programme correspondant à cette construction :

Construire le point P, symétrique de A par rapport à B.
Construire un triangle équilatéral BPR.

Construire le point C, symétrique de B par rapport à R.
Construire la médiatrice de [AC].
Tracer le cercle de diamètre [AC] (le centre est l'intersection de [AC] et de sa médiatrice). Il coupe la médiatrice de [AC] en deux points, nommer D celui qui n'est pas du même côté de (AC) que le point B.
Tracer le quadrilatère ABCD.



Remarque : Si on place D du même côté de (AC) que le point B ABCD est concave mais néanmoins non croisé.

Il subsiste une ambiguïté concernant l'angle $\widehat{ABC}$.

Si on considère que dans ce contexte il s'agit de l'angle intérieur au quadrilatère, il mesure alors 240° et ne convient pas.

Problème 4

Pour aller de A à B, un train roule pendant une heure et demi à 60 km/h puis termine le trajet à 200 km/h.
La vitesse moyenne de ce train sur l'ensemble du trajet est de 100 km/h.
Quelle est la distance de A à B ?

Soit t la durée (mesurée en heures) pendant laquelle le train roule à 200 km/h.

La durée totale du trajet est donc égale à $t+\frac{3}{2}$ et la longueur AB à $200t+90$

La vitesse moyenne étant de 100 km/h, on a donc :

$$\frac{200t+90}{t+\frac{3}{2}}=100$$

$$200t+90=100t+150$$

$$100t=60$$

$$t=0,6$$

Le train roule pendant 0,6 heures à 200 km/h, il parcourt donc 120 km à cette vitesse.
La distance totale parcourue est donc 90 + 120 soit 210 km.

Problème 5

	A	B	C	D
1		1	2	3
2	1	2	4	7
3	2	3	5	8
4	3	4	6	9

Problème 6

Dans un collège, une enquête a été menée sur « le poids des cartables des élèves ».
Pour cela, on a pesé le cartable de 48 élèves du collège.
Les résultats de cette enquête sont inscrits dans le tableau ci-dessous:

Poids en kg	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	2	4	2	5	11	8	8	3	4

1. Calculer l'étendue de cette série statistique.

L'étendue est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite soit 9 kg

2. Déterminer la médiane de cette série statistique.

L'effectif total est 48. Si on classe les poids par ordre croissant, le 24ème vaut 6, le 25ème également, la médiane est donc égale à 6.

3. Déterminer, les valeurs du premier quartile et du troisième quartile de la série.

Pour déterminer les quartiles, il faut partager la population en quatre parties d'effectifs égaux.
Le 12ème et le 13ème poids valent 5, le premier quartile est donc égal à 5.
Le 36ème et le 37ème poids valent 8, le troisième quartile est donc égal à 8.

Problème 7

Dans un jeu de 10 cartes numérotées de 1 à 10 on tire une carte, on la remet dans le jeu, puis on tire à nouveau une carte.
Quelle est la probabilité que la valeur de la deuxième carte tirée soit supérieure à celle de la première carte ?

La probabilité de tirer deux fois la même carte est de 1/10.
La probabilité de tirer deux cartes différentes est donc 9/10.
La probabilité de tirer en premier le nombre le plus élevé est égale à celle de tirer en premier le nombre le plus faible. Cette probabilité est donc la moitié de 9/10, soit 9/20.

On peut aussi représenter dans un tableau à double entrée toutes les issues possibles.
Les Cases grisées représentent les issues favorables, il y en a 45 sur 100 cases en tout ce qui conduit à la même probabilité.

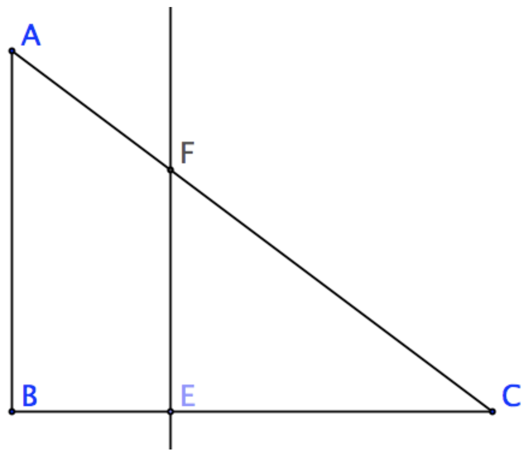
Premier tirage

Deuxième tirage

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Problème 8

ABC est un triangle rectangle en B tel que AB = 3 cm et BC = 4 cm.
E est un point de [BC]. La parallèle à (AB) passant par E coupe (AC) en F.
A quelle distance de B faut-il placer le point E pour que les longueurs AF et EF soient égales ?



Un triangle rectangle donc les côtés de l'angle droit mesurent 3 et 4 a une hypoténuse qui mesure 5. AC = 5 cm.
(EF) est parallèle à (AB), E est sur (BC] et F sur (AC), le théorème de Thalès s'applique donc aux triangles ABC et FEC :

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA} = \frac{EF}{BA}$$

$$\frac{CE}{4} = \frac{CF}{5} = \frac{EF}{3}$$

On en déduit que $EF = \frac{3}{4}CE$ et que $CF = \frac{5}{4}CE$ d'où $AF = 5 - \frac{5}{4}CE$

Comme AF = EF, on a :

$$\frac{3}{4}CE = 5 - \frac{5}{4}CE$$

$$3CE = 20 - 5CE$$

$$8CE = 20$$

$$CE = 2,5$$

Comme BE = BC - CE = 4 - CE, il faut placer le point E a 1,5 cm de B pour que AF = EF.

Problème 9

Un train est constitué, à l'aller, de deux locomotives identiques et de dix wagons-citernes du même modèle et ce train mesure alors 152 m de long. Après avoir vidé le contenu de tous les wagons-citernes, on décroche une locomotive et on ajoute deux wagons-citernes vides.
Après ces changements, le train ainsi constitué mesure 160 m de long. On cherche la longueur d'une locomotive et la longueur d'un wagon-citerne.

Résoudre ce problème par une méthode arithmétique et par une méthode algébrique.

Méthode arithmétique :
Quand on ajoute deux wagons tout en retirant une locomotive, la longueur augmente de 8 mètres.
Un train de 14 wagons sans locomotive mesurerait donc 168 mètres.
Un wagon mesure donc 168 : 14 = 12 mètres.
10 wagons mesurent 120 mètres donc les deux locomotives mesurent 32 mètres et une locomotive 16 mètres.

Méthode algébrique :
notons x la longueur en mètres d'un wagon, y celle d'une locomotive.
Le problème se ramène alors au système d'équations suivant :
$\begin{cases} 10x + 2y = 152 \\ 12x + y = 160 \end{cases}$ qui est équivalent à celui-ci : $\begin{cases} 5x + y = 76 \\ 12x + y = 160 \end{cases}$

On en déduit que $7x = 84$ d'où $x = 12$.
On a alors en reportant la valeur de x dans la première équation du deuxième système $60 + y = 76$ d'où $y = 16$.
Un wagon mesure 12 mètres, une locomotive mesure 16 mètres.

Problème 10

Le nombre entier A s'écrit avec trois chiffres, il est multiple de 6 et la somme de ses chiffres est égale à 6.
Déterminer toutes les valeurs possibles du nombre A

Si la somme des chiffres de A est 6, A est multiple de 3. Pour que A soit multiple de 6 il faut et il suffit qu'il soit de plus pair.
Classons les valeurs de A selon le chiffre des unités :

Valeurs de A se terminant par 0
600 510 420 330 240 150

Valeurs de A se terminant par 2
402 312 222 132

Valeurs de A se terminant par 4
204 114