CRPE 2011-2012—derniers réglages avant l'écrit (4).

Problème 1

A l'intérieur d'un cube de 4 cm d'arête, on construit comme le montre la figure ci-contre un tétraèdre dont les quatre sommets sont des sommets du cube.
Calculer le volume de ce tétraèdre.

Problème 2

A et B sont deux nombres entiers naturels tels que A > B
Est-il possible de choisir les valeurs de A et B pour qu'aucun des 4 nombres A, B, A + B et A - B ne soit multiple de 3 ?

Problème 3

Un prix augmente successivement de 20%, puis de 25% et enfin de 10%.
Le prix final après les trois augmentations est supérieur de 40,3 € au prix initial.
Quel était le prix initial ?

Problème 4

Combien peut-on construire de pavés droits différents vérifiant les deux critères suivants :

Toutes les arêtes mesurent un nombre entier de centimètres.
La longueur totale des 12 arêtes du pavé est 28 cm.

Problème 5

ABCD est un rectangle tel que AB > BC.
Le cercle de centre C qui passe par D coupe [AB] en un point E.
Le cercle de diamètre [CD] coupe (DE) en D et en F.
Démontrer que AF = EF.

Problème 6

Un piéton marche pendant 20 minutes à 3 km/h puis pendant 15 minutes à 4 km/h.
Il termine ensuite sa marche à 5 km/h.
La vitesse moyenne du piéton sur l'ensemble de son trajet est de 4,5 km/h.
Quelle distance a-t-il parcourue ?

Problème 7

Lors d'une élection, 80% des inscrits ont voté, 80% des votants ont mis dans l'urne un bulletin valable, et 80% des bulletins valables choisissaient le candidat X, lequel a obtenu 8 000 voix.
Combien d'électeurs étaient inscrits ?

Problème 8

On donne un segment [AB] de 6 cm de long.
Construire à la règle graduée et au compas le point C pour que la hauteur issue de A du triangle ABC mesure 3 cm et que la hauteur issue de B du même triangle mesure 2 cm.
S'il existe plusieurs solutions, on les donnera toutes.

Problème 9

Jean a dans son porte-monnaie des pièces de 20 centimes, 10 centimes et 2 centimes.
Il a 25 pièces pour une valeur totale de 2,54 €.
Combien de pièces de chaque sorte y a-t-il dans le porte-monnaie de Jean ?
Si il y a plusieurs solutions, on les donnera toutes.

Problème 10

Dessiner le patron d'un tétraèdre dont toutes les faces sont isocèles sans être équilatérales, ou bien justifiez l'impossibilité d'un tel patron.

CRPE 2011-2012—derniers réglages avant l'écrit (4).
Problèmes corrigés.

Problème 1

A l'intérieur d'un cube de 4 cm d'arête, on construit comme le montre la figure ci-contre un tétraèdre dont les quatre sommets sont des sommets du cube.
Calculer le volume de ce tétraèdre.

Il est plus facile d'obtenir le volume du tétraèdre central en soustrayant du volume du cube celui des quatre autres tétraèdres que par un calcul direct.

Chacun des trois autres tétraèdres a un volume égal à $\frac{1}{3}\times\frac{4\times 4}{2}\times 4$ soit $\frac{32}{3}$ cm^3.

Le volume du tétraèdre central est donc égal à $64-\frac{32}{3}\times 4$ soit $\frac{64}{3}$ cm^3 .

Problème 2

A et B sont deux nombres entiers naturels tels que A > B
Est-il possible de choisir les valeurs de A et B pour qu'aucun des 4 nombres A, B, A + B et A - B ne soit multiple de 3 ?

Le tableau ci-dessous indique les nombres qui sont multiples de 3 selon les valeurs des restes des divisions par 3 de A et de B.

reste dans la division de A par 3

		0	1	2
reste dans la division de B par 3	0	A, B, A+B, A-B	B	B
	1	A	A-B	A+B
	2	A	A+B	A-B

Démontrons le résultat de la case grisée (les autres résultats non évidents se démontrent de manière analogue).
Les divisions par 3 de A et de B ayant les restes indiqués, il existe un entier p et un entier q tels que
A = 3p + 1 et B = 3q + 2. Alors, A+B = 3p + 1 + 3q + 2 = 3p + 3q + 3 = 3 (p + q + 1) ce qui établit que A + B est multiple de 3.
Le tableau étant exhaustif, il est impossible qu'aucun des 4 nombres A, B, A+B et A-B ne soit multiple de 3.

Problème 3

Un prix augmente successivement de 20%, puis de 25% et enfin de 10%.
Le prix final après les trois augmentations est supérieur de 40,3 € au prix initial.
Quel était le prix initial ?

La solution s'appuie sur l'idée qu'augmenter un nombre de 20% revient à le multiplier par 1,20.
Soit p le prix initial. 1,1 x 1,25 x 1,2 x p = p + 40,3
1,65 p =p + 40,3
0,65p = 40,3
p = 40,3 / 0,65 = 62

Le prix initial était de 62 €

Problème 4

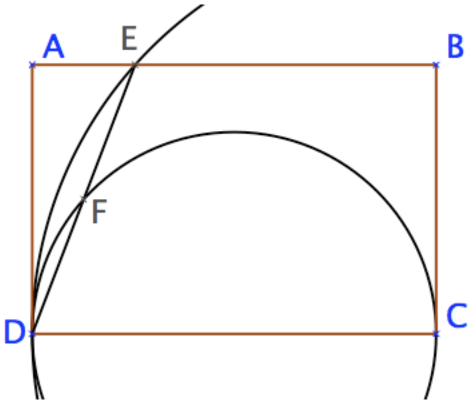
Combien peut-on construire de pavés droits différents vérifiant les deux critères suivants :
Toutes les arêtes mesurent un nombre entier de centimètres.
La longueur totale des 12 arêtes du pavé est 28 cm.

Un pavé droit est entièrement déterminé par ses trois dimensions a b et c.

Par ailleurs, la somme des longueurs des arêtes est égale à 4 (a + b + c). donc a + b + c = 7
Le problème revient donc a trouver tous les triplets de nombres entiers positifs dont la somme est 7
En procédant de manière ordonnée, on trouve :
1 1 5 1 2 4 1 3 3 2 2 3
Il existe donc 4 pavés droits différents répondant aux deux critères fixés.

Problème 5

ABCD est un rectangle tel que AB > BC.
Le cercle de centre C qui passe par D coupe (AB) en un point E.
Le cercle de diamètre [CD] coupe (DE) en D et en F.
Démontrer que AF = EF.



E et D sont sur le même cercle de centre C donc le triangle CED est isocèle en C.
F est sur le cercle de diamètre [CD] donc le triangle DFC est rectangle en F, (FC) est donc la hauteur issue de C du triangle CDE.
CDE est isocèle en C, sa hauteur issue de C est donc aussi la médiane issue de C, par conséquent F est le milieu de [DE].
Dans le triangle DAE, rectangle en A, F est le milieu de l'hypoténuse donc il est équidistant des trois sommets par conséquent FA = FE.

Problème 6

Un piéton marche pendant une 20 minutes à 3 km/h puis pendant 15 minutes à 4 km/h.
Il termine ensuite sa marche à 5 km/h.
La vitesse moyenne du piéton sur l'ensemble de son trajet est de 4,5 km/h.
Quelle distance a-t-il parcourue ?

Remarque : La structure de ce problème est exactement identique à celle du problème 4 de la fiche 3.
soit t la durée en heures du trajet effectué à 5 km/h.
La durée totale du trajet est donc égale à t + 1/3 + 1/4 tandis que la distance totale est 5t + 2.
On a donc :

$$\frac{5t+2}{t+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 4,5$$

$$\frac{60t+24}{12t+4+3} = 4,5$$

$$60t+24 = 54t+31,5$$

$$6t = 7,5$$

$$t = \frac{7,5}{6} = 1,25$$

Le piéton marche pendant 1 heure et quart à 5 km/h, il parcourt pendant ce temps 1,25 x 5 = 6,25 km.
La distance totale parcourue est donc de 8,25 km.

Problème 7

Lors d'une élection, 80% des inscrits ont voté, 80% des votants ont mis dans l'urne un bulletin valable, et 80% des bulletins valables choisissaient le candidat X, lequel a obtenu 8 000 voix.
Combien d'électeurs étaient inscrits ?

Soit N le nombre d'électeurs inscrits :

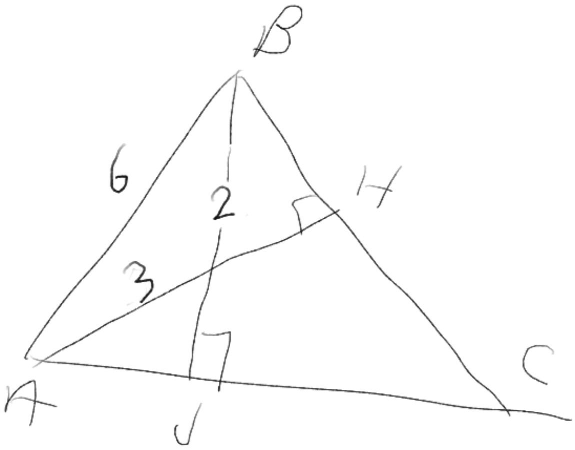
$$N \times \frac{80}{100} \times \frac{80}{100} \times \frac{80}{100} = 8000$$

$$N = \frac{8000 \times 100000}{8 \times 8 \times 8 \times 1000} = \frac{1000000}{8 \times 8} = 15625$$

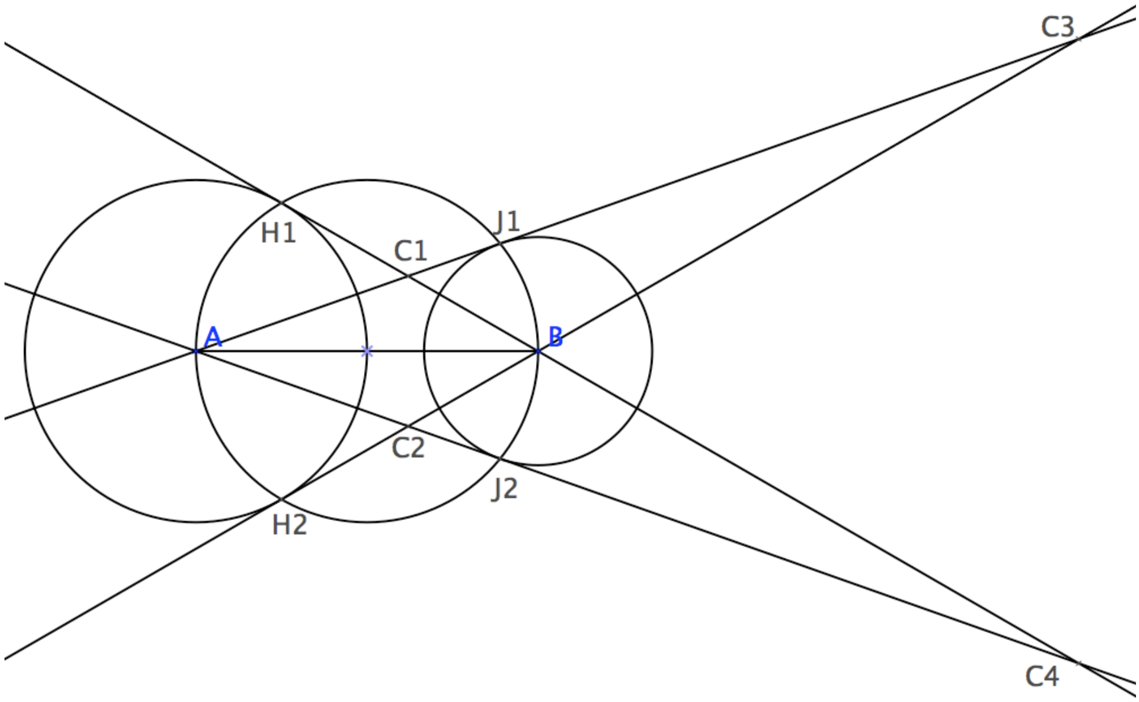
15 625 électeurs étaient inscrits.

Problème 8

On donne un segment [AB] de 6 cm de long.
Construire à la règle graduée et au compas le point C pour que la hauteur issue de A du triangle ABC mesure 3 cm et que la hauteur issue de B du même triangle mesure 2 cm.
S'il existe plusieurs solutions, on les donnera toutes.



Le brouillon ci-contre permet de remarquer que si on construit les points H et J, on obtiendra facilement C.
L'idée principale à utiliser pour construire H et J est la suivante : ABH est rectangle en H donc H est sur le cercle de diamètre [AB].
On remarquera aussi que le triangle ABC a été du brouillon a été tracé au hasard, qu'il ne respecte pas les dimensions demandées (sur le dessin, BJ ≈ AH) mais que ça ne gène pas l'analyse.



Il est probable que les points C3 et C4 ne tiennent pas dans votre feuille. C'est sans importance, il suffit de préciser qu'ils existent et de les définir : C3 est l'intersection de (AJ_1) et (BH_2)

Problème 9

Jean a dans son porte-monnaie des pièces de 20 centimes, 10 centimes et 2 centimes.
Il a 25 pièces pour une valeur totale de 2,54 €.
Combien de pièces de chaque sorte y a-t-il dans le porte-monnaie de Jean ?
Si il y a plusieurs solutions, on les donnera toutes.

La somme obtenue avec les pièces de 10 c et de 20 centimes est un multiple de 10 c.
La somme totale étant 254 c, la somme obtenue avec les pièces de 2 c doit avoir 4 comme chiffre des unités.
Le nombre de pièces de 2 c peut donc être 2, 7, 12, 17 ou 22.
Pour chacune de ces valeurs, on voit s'il est possible de compléter avec des pièces de 10 c et 20 c pour obtenir 254 c.

avec 2 pièces de 2 c, on a 4 c. Il faut donc avoir 250 c avec 23 pièces de 10 c ou 20 c, ce qui est possible avec 21 pièces de 10 c et 2 de 20 c.
On peut trouver ce résultat en résolvant un système d'équations, mais aussi en remarquant que 23 pièces de 10 font 230 c et que chaque remplacement d'une pièce de 10 par une pièce de 20 augmente le total de 10 centimes.

avec 7 pièces de 2 c, on a 14 c. Il faut donc avoir 240 c avec 18 pièces de 10 c ou 20 c, ce qui est possible avec 12 pièces de 10 c et 6 de 20 c.

avec 12 pièces de 2 c, on a 24 c. Il faut donc avoir 230 c avec 13 pièces de 10 c ou 20 c, ce qui est possible avec 3 pièces de 10 c et 10 de 20 c.

avec 17 pièces de 2 c, on a 34 c. Il faut donc avoir 220 c avec 8 pièces de 10 c ou 20 c, ce qui est impossible.
Il est de même impossible d'utiliser 22 pièces de 2 centimes.

Il y a donc trois solutions :
2 pièces de 2 centimes, 21 pièces de 10 centimes, 2 pièces de 20 centimes.
7 pièces de 2 centimes, 12 pièces de 10 centimes, 6 pièces de 20 centimes.
12 pièces de 2 centimes, 3 pièces de 10 centimes, 10 pièces de 20 centimes.

Problème 10

Dessiner le patron d'un tétraèdre dont toutes les faces sont isocèles sans être équilatérales, ou bien justifiez l'impossibilité d'un tel patron.

Voici le patron d'un tel tétraèdre (il y a beaucoup d'autres solutions possibles).