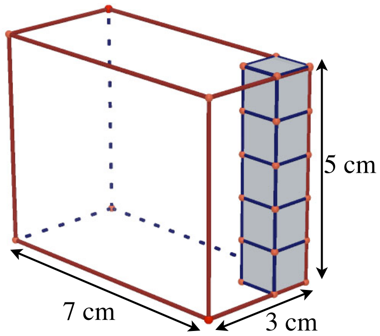
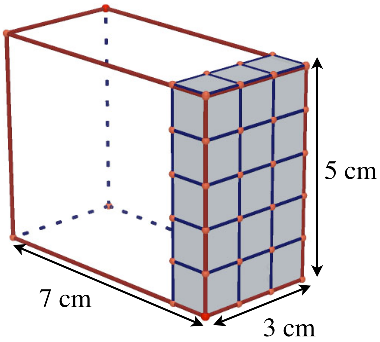
Formules de calcul de volume des solides usuels.

Déterminer le volume d'un solide en cm³, c'est trouver combien il faut de cubes d'un cm d'arête pour remplir ce solide.

1. Le pavé droit.

Il s'agit d'une boite rectangulaire, telle une boite à chaussure. Il est facile d'imaginer le remplissage effectif.





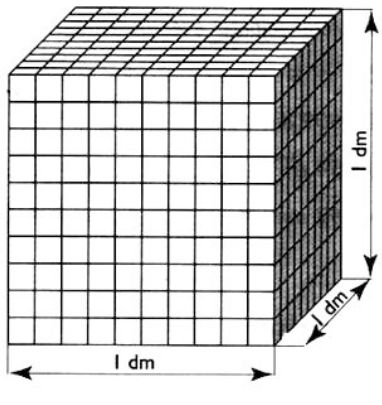
Pour remplir le pavé de l'illustration, on peut commencer par placer une colonne de 5 cubes.
Avec 3 colonnes identiques, on fabrique une plaque de $3 \times 5 = 15$ cubes.
Avec 7 plaques identiques, on remplit le pavé.
Le pavé contient $3 \times 5 \times 7$ petits cubes, son volume mesure $3 \times 5 \times 7 = 105$ cm³.

Si on désigne par L (pour Longueur) l (pour largeur) et h (pour hauteur) les trois dimensions du pavé droit, on retrouve la formule :

Volume du pavé droit = L x l x h.

Suggestion de travail personnel : L'explication ci-dessus n'est convaincante que pour des pavés dont les dimensions sont des nombres entiers de centimètres. Or la formule reste correcte si les dimensions ne sont pas entières.
Expliquez pourquoi la formule est correcte avec des mesures décimales non entières, par exemple pour un pavé dont les dimensions sont 3,2 cm 2,4 cm et 1,7 cm.

Un cas particulier de pavé droit très important :



Prenons un cube dont les arêtes mesurent 10 cm (ou un décimètre).
Par définition, le volume de ce cube s'appelle un décimètre cube.
En remplissant ce cube avec des centimètres cubes, on constate que le décimètre cube contient $10 \times 10 \times 10 = 1000$ centimètres cubes.

On obtient par le même raisonnement plusieurs relations du même type :

1 dm³ = 1000 cm³ **1 m³ = 1000 dm³** **1 cm³ = 1000 mm³**

Ces égalités sont fondamentales pour passer d'une unité de volume à une autre.

Suggestion de travail personnel : effectuer des conversions du type «combien 24 dm³ font-ils de m³ ?» «combien 0,42 m³ font-ils de cm³ ?» à l'aide des égalités précédentes… c'est à dire sans recourir à un tableau de conversion.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

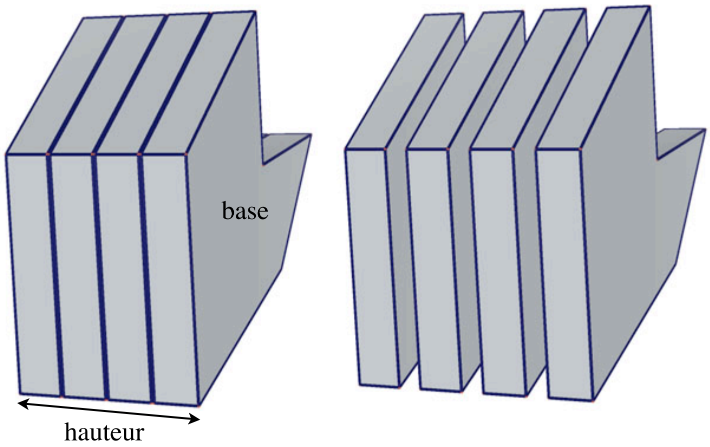
2. **Le prisme droit**

Un prisme droit est un polyèdre dans lequel:

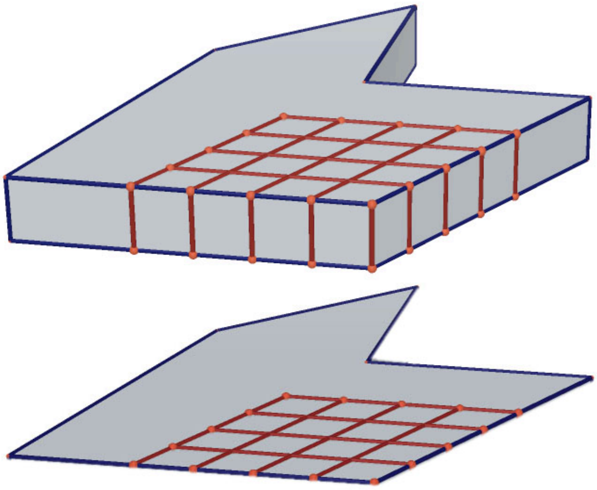
Deux faces sont à la fois parallèles et identiques (on les appelle les bases).

Les autres faces sont toutes des rectangles.On les appelle les faces latérales.

pour calculer le volume d'un prisme droit :



On le découpe en couches identiques d'un cm d'épaisseur.
Le volume du prisme est égal au volume d'une couche multiplié par le nombre de couche.



On découpe ensuite chaque couche en petits cubes d'un centimètre d'arête.

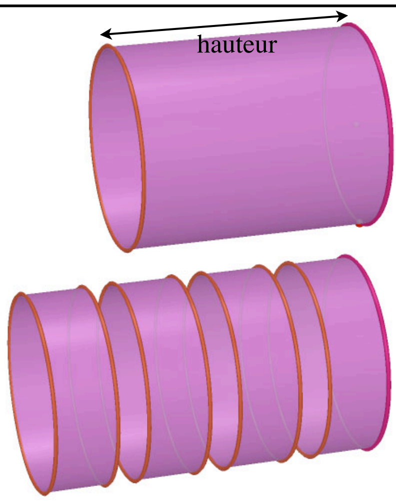
Il y a autant de cubes dans une couche que de carrés dessinés sur la base.

Le nombre total de centimètres cubes dans le prisme est égal au nombre de carrés sur la base multiplié par le nombre de couches.

on résume ce résultat sous la forme:

volume du prisme droit = aire de base × hauteur

Suggestion de travail personnel : Reprendre les étapes du raisonnement justifiant la formule de calcul du volume d'un prisme droit en essayant d'appliquer ce raisonnement à un cylindre.
Conclure : la formule valable pour le prisme droit est-elle également valable pour un cylindre ?

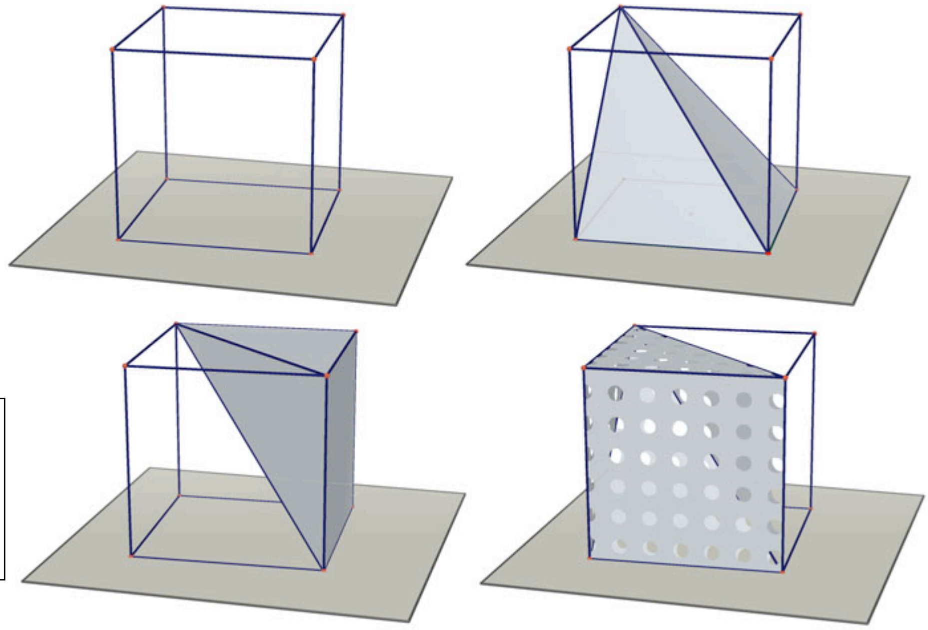


3. **La pyramide.**

L'illustration ci-contre montre comment remplir un cube avec trois pyramides identiques.

Le volume de cette pyramide est égal au tiers du volume du cube ayant même base et même hauteur

Suggestion de travail personnel :
construire les 3 pyramides permettant de remplir un cube dont les arêtes mesurent 4 cm.

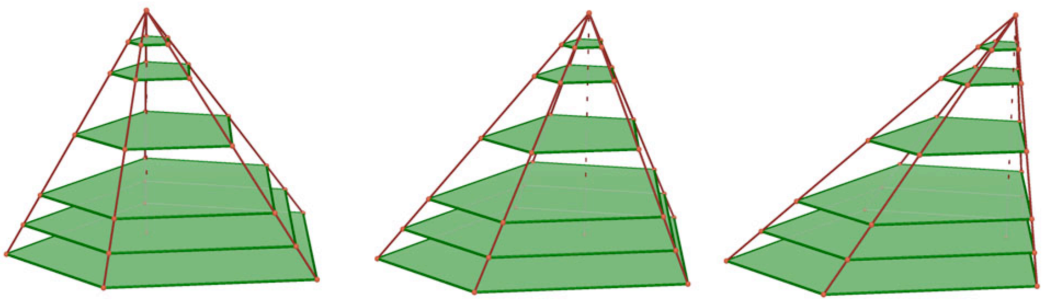


Si on utilise pour le cube la formule de calcul de volume valable pour tous les prismes droits (le cube en est un) on obtient : **volume du cube = aire de la base x hauteur**

Or la base du cube est une de ses faces, comme la base de la pyramide. la hauteur du cube est une de ses arêtes, comme la hauteur de la pyramide. On obtient donc, pour la pyramide particulière utilisée sur l'illustation :

$$\textbf{volume de la pyramide} = \frac{aire\ de\ base \times hauteur}{3}$$

La suite du document propose des expériences mentales qui, sans être des preuves mathématiques, peuvent aider à comprendre pourquoi la formule ci-dessus est valable pour toutes les pyramides.

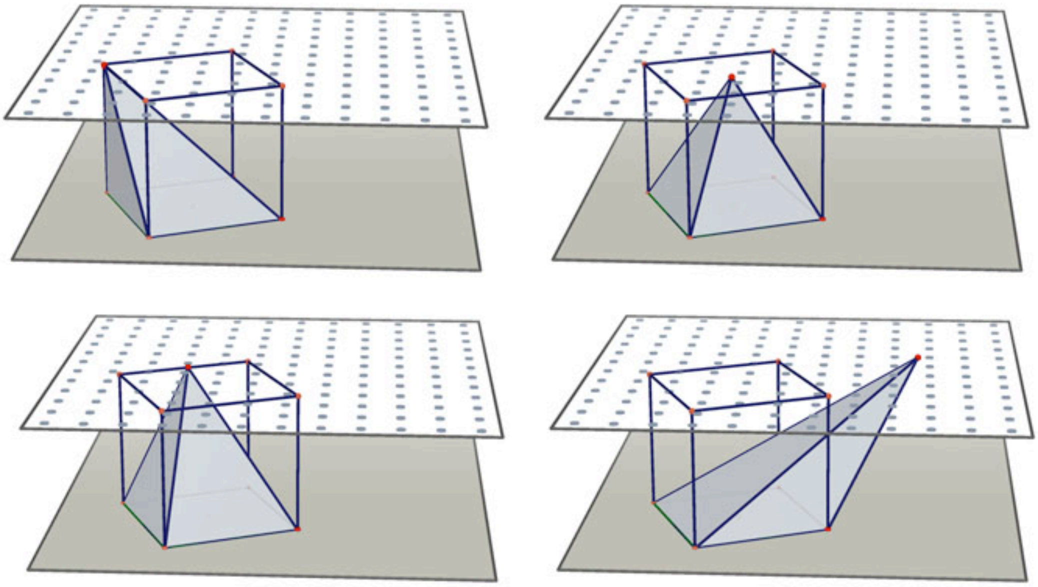


Imaginons une pyramide découpée en un très grand nombre de tranches très minces parallèlement à la base (nous avons dessiné 6 tranches parmi les millions de tranches qui constituent la pyramide).
En faisant glisser les tranches les unes sur les autres, on peut déformer la pyramide.
Les nouvelles pyramides ainsi obtenues ont le même volume que la pyramide initiale (c'est la somme des volumes des tranches). Elles ont aussi la même base et la même hauteur.
Par conséquent, si la formule «**volume de la pyramide** = $\frac{aire\ de\ base \times hauteur}{3}$ » est valable pour l'une des pyramides de l'illustration, elle l'est aussi pour les autres.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

La formule proposée est vraie pour la première pyramide de ce schéma (une des pyramides identiques avec lesquelles on remplit le cube).

Déformons cette pyramide comme dans l'expérience précédente . La formule proposée, qui est vraie pour la première pyramide, est encore vraie pour les trois autres.

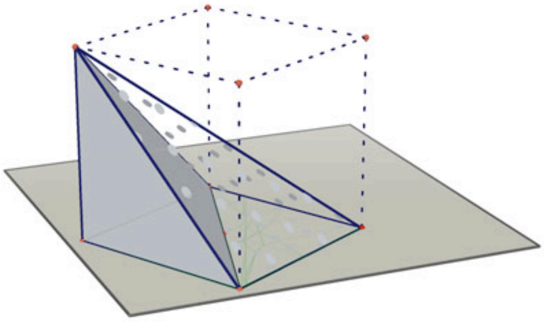


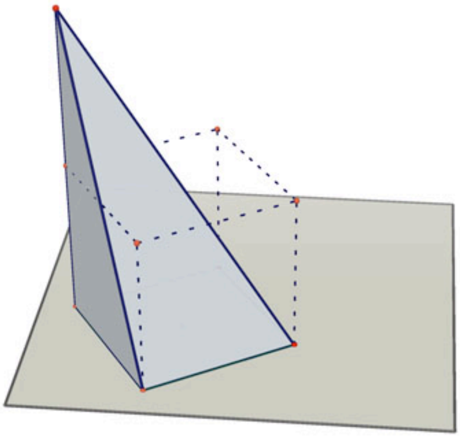
Suggestions de travail personnel :

Cercher quelles expériences mentales permettent de comprendre pourquoi la formule donnée plus haut est encore vraie pour les pyramides ci-contre et églement pour le cône.

La première pyramide a pour base un triangle qui est une moitié de face du cube, son sommet principal est un sommet du cube.

La seconde pyramide a pour base une face du cube.
On a doublé sa hauteur par rapport à la pyramide utilisée pour remplir le cube.

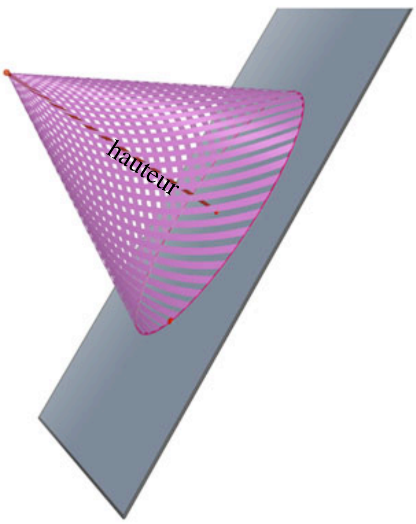




Que vous parveniez ou non à justifier la validité de la formule pour ces trois solides, il faut la mémoriser :

$$\textbf{volume de la pyramide} = \frac{aire\ de\ base \times hauteur}{3}$$

$$\textbf{volume du cône} = \frac{aire\ de\ base \times hauteur}{3}$$



L'utilisation de ces formules suppose l'identificacion correcte de la base (qui n'est pas nécessairement horizontale) et de la hauteur (qui n'est pas nécessairement verticale).

Les formules données dans ce document sont les seules figurant au programme du collège, et donc du CRPE.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire