IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.
Préparation au CRPE

# Corrigé de l'épreuve blanche de mathématiques du 4 décembre 2009

*Le texte en italique donne des informations qui n'étaient pas attendues des candidats.*

## Exercice 1

Soit r le reste de la division de N par 5, le quotient est alors égal à 3r.
La division euclidienne de N par 5 se traduit donc par l'égalité suivante :
$N = 5 \times 3r + r$ soit $N = 16r$.
Dans une division euclidienne par 5, les valeurs possibles pour le reste sont 0, 1, 2, 3 et 4.
Si r = 0, N = 0 or N n'est pas nul par hypothèse.
Les valeurs possibles pour N sont donc 16, 32, 48 et 64.

*Autre version :*
*dans une division euclidienne par 5, le reste peut valoir 0, 1, 2, 3 ou 4.*
*Etudions successivement chacune des valeurs du reste.*
*Si le reste est 0, le quotient est $3 \times 0 = 0$, on a alors $N = 5 \times 0 + 0 = 0$, ce qui est incompatible avec l'énoncé.*
*Si le reste est 1, le quotient est $3 \times 1 = 3$, on a alors $N = 5 \times 3 + 1 = 16$.*
*Si le reste est 2, le quotient est $3 \times 2 = 6$, on a alors $N = 5 \times 6 + 2 = 32$.*
*Si le reste est 3, le quotient est $3 \times 3 = 9$, on a alors $N = 5 \times 9 + 3 = 48$.*
*Si le reste est 4, le quotient est $3 \times 4 = 12$, on a alors $N = 5 \times 12 + 4 = 64$.*
*Les valeurs possibles pour N sont donc 16, 32, 48 et 64.*

Soit s le reste de la division de P par 333, le quotient est alors égal à 3s.
La division euclidienne de N par 333 se traduit donc par l'égalité suivante :
$P = 333 \times 3s + s$ soit $P = 1000\ r$.
Dans une division euclidienne par 333, le reste peut prendre toutes les valeurs entières de 0 à 332.
Les nombres entiers dont le quotient dans la division euclidienne par 333 est le triple du reste sont donc les multiples de 1000, de 0 à 332000.
P est par hypothèse non nul et inférieur à 10 000, pour satisfaire auss cette condition, P doit être choisi parmi les nombres suivants 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000 et 9000.
Parmi ces nombres, seuls 3000, 6000 et 9000 sont des multiples de 6 et vérifient donc toutes les conditions imposées.

## Questions complémentaires.

a) Proposer ce type de problème de partage, dont la solution experte est la division euclidienne avant d'avoir enseigné cette opération est judicieux pour deux raisons :

Indépendamment de la division, ce sont de véritables problèmes, intéressants entre autres parce que la résolution ne se ramène pas à une opération déjà connue : il faut prendre des initiatives, deviner la « bonne opération » est impossible.

Le fait d'avoir déjà rencontré plusieurs problèmes de ce type (*et des problèmes de groupement*) permettra de donner un sens à la division quand elle sera enseignée : il s'agit d'un outil pour résoudre cette catégorie de problèmes de façon efficace.

*Cette conception selon laquelle les opérations sont des outils pour résoudre des problèmes, (opposée à une conception selon laquelle les problèmes sont des occasions d'appliquer les* *opérations enseignées) était au centre des programmes 2002, elle est moins clairement exprimée dans les programmes 2008, on la retrouve cependant à plusieurs endroit dans ces textes, par exemple dans cet extrait du programme de maternelle.*

> *Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun. À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe "égal") et les techniques.*

*L'extrait qui suit (programme du cycle 2) semble hésiter entre les deux conceptions, cependant la nécessité de poser des problèmes relevant de la division avant d'en enseigner la technique reste affirmée.*

> *Ils mémorisent et utilisent les tables d'addition et de multiplication (par 2, 3, 4 et 5), ils apprennent les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction, celle de la multiplication et apprennent à résoudre des problèmes faisant intervenir ces opérations. Les problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la division pour des nombres inférieurs à 100.*

*Poser des problèmes de partage avant d'enseigner la division peut également permettre au maître de s'appuyer sur certaines procédures des élèves qui mettent en œuvre implicitement des idées utilisées dans les techniques usuelles de division (l'élève A effectue des soustractions successives des quantités qu'il a déja réparties, l'élève B s'appuie sur la décomposition du nombre 216 en centaines dizaines et unités).*
*On peut enfin noter que la division ne traduit pas seulement des problèmes de partage (On partage 216 billes entre 3 enfants, combien de billes aura chaque enfant ?) mais aussi des problèmes de groupement (Avec 216 billes, on remplit des petits sacs de trois billes, combien de sacs va-t-on remplir ?). Il est souhaitable de poser des problèmes relevant des deux catégories.*

b) Procédure de l'élève A
Il choisit un nombre de billes suffisamment petit pour qu'il soit possible de donner ce nombre à chacun des trois enfants, l'écrit trois fois pour garder une trace de la distribution, calcule mentalement le nombre total de billes distribuées à cette étape (150) puis, en posant une soustraction, le nombre de billes restant à distribuer .
Il réitère ensuite le procédé jusqu'à ce qu'il ne reste plus de billes à distribuer et calcule enfin mentalement le nombre de billes donné à chaque enfant en additionnant les nombres donnés à chaque étape.
Le raisonnement et toutes les étapes du calcul sont corrects, à l'exception d'une erreur dans la soustraction 216 - 150 (il a effectué 5 - 1 au lieu d'avoir recours à une retenue).
D'autre part il y a une imprécision à la fin : si on dispose de 26 billes et qu'on en donne 8 à chaque enfant, il reste deux billes non distribuées dont il n'y a pas trace. *On ne peut pas savoir si cela traduit une erreur dans les tables de multiplication (3 x 8 = 26) ou si le reste n'est pas mentionné parce qu'il n'est pas explicitement demandé dans la question.*
*On aurait pu s'attendre à ce que l'élève remarque son erreur par un calcul simple sur les ordres de grandeur : 98 est très près de 100 donc 3* x *98 est très proche de 300, ce qui ne convient pas.*

Procédure de l'élève B
Il représente la situation en dessinant 6 billes isolées, une dizaine et deux centaines (dans lesquelles les dizaines sont représentées).
Il entoure ensuite sur son schéma la plus grande quantité qu'il sait partager en trois facilement : 15 dont il note que c'est égal à 3 x 5.

Restent alors 2 centaines et une unité non distribuées. Probablement induit en erreur par son schéma dans lequel les dizaines constituant les centaines sont représentées par des ronds très semblables à ceux qui représentent les billes isolées, Il considère alors qu'il lui reste 21 dizaines, qu'il sait répartir en trois fois 7 dizaines.
L'élève B fait alors mentalement la synthèse de ses deux étapes de distribution : il a donné 7 dizaines et 5 unités à chaque élève, soit 75 billes.
Comme pour A, le principe de la procédure et la plupart des opérations sont corrects, la seule erreur est d'avoir compté une dizaine là où il y avait une unité.

c) Pour que la procédure de l'élève B aboutisse, il suffit de décomposer 216 en 21 dizaines et 6 unités. On peut alors partager les dizaines (7 pour chaque enfant) et les unités (2 pour chaque enfant) puis conclure que chaque enfant a reçu 72 billes.

**Exercice 2**

*Partage numéro 1*
*Soit T le point tel que BAMT est un rectangle. L'aire de ABM est égale à la moitié de celle de ce rectangle, il n'en est pas de même pour BMN (sauf dans le cas ou ABCD est un rectangle).*

Partage numéro 2
Les quatre morceaux sont des trapèzes.
Pour chacun des quatre l'une des bases mesure AD/4 et l'autre mesure BC/4.
Par ailleurs la hauteur de chaque trapèze mesure AB.
La formule de calcul d'aire d'un trapèze permet alors de dire que les quatre morceaux ont la même aire, égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{4}+\frac{BC}{4}\right)\times AB$

*Il est également possible de partager chacun des petits trapèzes en deux triangles par une de ses diagonales. Les triangles dont un côté est porté par (AD) ont des aires égales, les triangles dont un côté est porté par (BC) ont des aires égales, ce qui permet de conclure puisque chaque trapèze est obtenu en assemblant un triangle de chacune des deux catégories.*
*Partage numéro 3*
*Soit U le point tel que BADU est un rectangle. L'aire de ABD est égale à la moitié de celle de ce rectangle, elle n'est donc pas égle à la moitié de l'aire de ABCD (sauf si ABCD est lui même un rectangle), les quatre morceaux n'ont donc généralement pas des aires égales.*

Partage numéro 4
Considérons les triangles ABX, AXO, AOY et AYD. Si on choisit comme base pour chacun de ces triangles le côté situé sur (BD), alors ils ont des bases de même longueur et la même hauteur issue de A, ils ont donc des aires égales. Notons a la mesure commune de ces aires.
Il en va de même pour les triangles CBX, CXO, COY et CYD. Notons c la mesure commune de ces aires.
Les quatre morceaux sont chacun formé d'un triangle d'aire a et d'un triangle d'aire c, ils ont donc tous pour aire a + c.

*Partages numéros 5 et 6*
*Soit Z l'intersection de (CD) et de la parallèle à (AD) passant par F.*
*Les trapèzes AFZD et BFZC ont des hauteurs égales et une de leurs bases en commun. En revanche, l'autre base n'a pas la même longueur (sauf dans le cas où ABCD est un rectangle). Les aires de ces deux trapèzes ne sont donc généralement pas égales.*
*Or si les quatre morceaux avaient la même aire, chacun de ces trapèzes aurait pour aire la moitié de l'aire de ABCD, les quatre morceaux n'ont donc pas tous la même aire.*

**Questions complémentaires :**
*Attention, ce corrigé comporte 5 procédures, mais le jury du CRPE considère comme important de fournir le nombre indiqué de réponses (3 ici), et pas plus.*

Les deux premières procédures décrites ne font pas appel à la mesure, les trois suivantes l'utilisent.

Procédure 1 : découper effectivement l'une des figures en plusieurs morceaux que l'on recolle sur l'autre figure. Si les morceaux sont bien choisis on parvient à recouvrir exactement l'autre figure et on conclut que les aires sont égales.

Procédure 2 : montrer à l'aide du dessin, mais sans procéder à un découpage effectif, qu'il est possible de transformer les deux figures en deux rectangles superposables (en déplaçant un triangle rectangle dans un cas, un carré dans l'autre).

Procédure 3 : Compter les carreaux contenus dans chaque figure. Pour le trapèze, on procède avant le comptage à des associations de morceaux de façon à reconstituer des carreaux entiers.

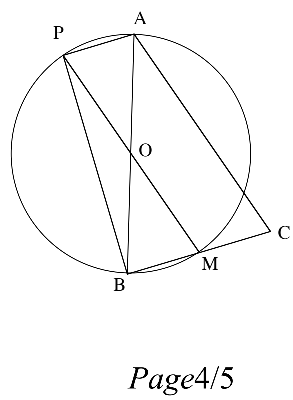
Procédure 4 : Calculer l'aire de chaque figure (l'unité d'aire étant un carreau du quadrillage, l'unité de longueur le côté d'un de ces carreaux) en les décomposant en figures pour lesquelles une méthode de calcul est connue. Le trapèze peut ainsi être décomposé en un carré et deux triangles rectangles, l'autre figure en trois morceaux rectangulaires ou carrés.

Procédure 5 : Identique à la procédure 4 mais en utilisant comme unités le cm et le cm$^2$ ou bien le mm et le mm$^2$. *Cette procédure conduira probablement à la conclusion que les aires sont différentes, ce qui n'est pas la réponse attendue mais peut difficilement être considéré comme faux étant donné le grand nombre d'éléments implicites dans ce problème (les cases du quadrillage sont-elles carrées, les sommets des figures coïncident-ils avec les intersections du quadrillage…). L'éventualité d'une telle réponse dans la classe peut conduire à d'intéressants débats sur la précision des mesures et la définition des figures étudiées.*

Un carré d'un mètre de côté peut être découpé par des lignes parallèles à ses côtés en 100 rangées de 100 petits carrés d'un centimètre de côté, il contient donc 100 x 100 = 10 000 petits carrés.
Ceci conduit à l'égalité 10 000 cm$^2$ = 1 m$^2$
Dans 230 000 cm$^2$, combien de fois y a-t-il 10 000 cm$^2$ ?
230 000 c'est 2 centaines de mille et 3 dizaines de mille, c'est donc 23 dizaines de mille.
donc 230 000 cm$^2$, c'est 23 fois 10 000 cm$^2$, c'est 23 m$^2$

*On peut également, une fois établie l'égalité 10 000 cm$^2$ = 1 m$^2$ utiliser des raisonnements du type suivant :*
*si 10 000 cm$^2$ = 1 m$^2$, alors 30 000 cm$^2$ = 3 m$^2$ (trois fois plus)*
*si 10 000 cm$^2$ = 1 m$^2$, alors 100 000 cm$^2$ = 10 m$^2$ (trois fois plus)*
*Alors, 230 000 cm$^2$ (100 000 + 100 000 + 30 000) sont égaux à 23 m$^2$ (10 + 10 + 3).*

**Exercice 3**




a) M est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M. Il en résulte que, dans le triangle ABC, le segment [AM] est la hauteur issue de A.
Comme le triangle ABC est isocèle en A, sa hauteur issue de A est aussi la médiane issue de A, par conséquent M est le milieu de [BC].

b) P est le symétrique de M par rapport à O, donc O est le milieu de [PM].
Les diagonales [AB] et [PM] du quadrilatère BMAP ont le même milieu O, donc BMAP est un parallélogramme.
BMPA est un parallélogramme, ses côtés opposés [AP] et [MB] ont donc la même longueur.
M est le milieu de [BC] donc MB = MC.
AP = MB et MB = MC donc AP = MC.

c) R est le symétrique de P par rapport à A, donc PR = 2 PA
M est le milieu de [BC] donc BC = 2 MC.
On a démontré que AP = MC, donc 2AP = 2MC et PR = BC.

BMAP est un parallélogramme, ses côtés opposés sont donc parallèles.
Il en résulte que (PA) // (BM). Comme les points P,A et R sont alignés ainsi que les points B, M et C, on en déduit que (PR) // ( BC).
Le quadrilatère non croisé PBCR a deux côtés opposés à la fois parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

P étant le symétrique d'un point du cercle par rapport au centre du cercle, il est situé sur le cercle.
P est un point du cercle de diamètre [AB] donc le triangle APB est rectangle en P.
Il en résulte que le parallélogramme PBCR a un angle droit, c'est donc un rectangle.

Exercice 4.
Si deux nombres sont multiples de 7, ils peuvent s'écrirent respectivement 7a et 7b, où a et b sont des nombres entiers.
La somme des deux nombres est alors égale à 7a + 7 b c'est à dire à 7 (a + b) c'est donc toujours un multiple de 7.

$5 + 2 = 7 \qquad 5 + 4 = 9$
Il résulte de ces deux exemples que la somme d'un multiple de 5 et d'un multiple de 2 est parfois un multiple de 7, mais pas toujours.

$A = 1\,000\,000\,000 = 10^9 = 2^9 \times 5^9$
Le nombre premier 7 ne figure pas dans la décomposition de A en facteurs premiers, donc A n'est pas multiple de 7.

$B = 560\,000\,350 = 560\,000\,000 + 350 = 7 \times 80\,000\,000 + 7 \times 50$
B est la somme de deux multiples de 7, donc c'est un multiple de 7

$C = 699\,999\,996$
$C + 4 = 700\,000\,000 = 7 \times 100\,000\,000.$ C + 4 étant un multiple de 7, C n'en est pas un.

$D = 146\,307\,840 = 140\,000\,000 + 6\,300\,000 + 7\,000 + 840$
$D = 7 \times 20\,000\,000 + 7 \times 900\,000 + 7 \times 1000 + 7 \times 120$
$D = 7 \times (20\,000\,000 + 900\,000 + 1000 + 120)$ donc D est un multiple de 7.

$E = 4 \times 7\,777\,777\,772 + 5 \times 7\,777\,777\,774.$
$E = 4\,( 7 \times 1111111110 + 2 ) + 5\,( 7 \times 1111111110 + 4 )$
Par la suite le nombre 1111111110 est noté n pour alléger l'écriture.
$E = 4\,(7n + 2) + 5\,( 7n + 4) = 4\times 7n + 8 + 5\times 7n + 20 = 9\times 7n + 28$
E est la somme de deux multiples de 7, c'est donc un multiple de 7.