Corrigé non officiel de la partie mathématique du CRPE, session 2011 (Rouen)

Problème 1
Partie A
On peut remarquer que la définition de D_a est très ambigüe : l'expression «le moment ou le conducteur voit un obstacle et commence à freiner» confond deux moments distincts.
C'est précisément parce que le conducteur ne commence pas à freiner à l'instant même où il voit l'obtacle qu'on doit distinguer distance de freinage et distance d'arrêt.
1.a) A la vitesse d'un mètre par seconde, on parcourt 3600 mètres en une heure. il en résult l'égalité suivante : 1 m/s = 3,6 km/h.
90 : 3,6 = 25. donc 90 km/h = 25 m/s
Le graphique indique que la distance de freinage pour une vitesse de 25 m/s est de 50 mètres

130 : 3,6 ≈ 36,1 donc 130 km/h ≈ 36,1 m/s
Pour une telle vitesse, le graphique indique que la distance de freinage est proche de 104 mètres.

b) On considère dans ce problème que le temps de réaction est d'une seconde. La distance parcourue dans ce temps est donc de 25 m à 90 km/h, de 36,1 m environ à 130 km/h (calculs effectués à la question A. On obtient les distances d'arrêt en ajoutant ces valeurs aux distances de freinage

La distance d'arrêt à 90 km/h est donc égale à 75 m
La distance d'arrêt à 130 km/h est proche de 140 m

c) Si la distance parcourue pendant le temps de réaction (d'une seconde) est 15 m, la vitesse du véhicule est 15 m/s.
or 1 m/s = 3,6 km/h la vitesse en km/h est donc égale à 15 x 3,6 soit 54 km/h

d) La distance de freinage (à la vitesse donnée à la question précédente probablement, mais il aurait été préférable que l'énoncé le mentionne) est proche de 18 m selon le graphique.
La distance d'arrêt est donc voisine de 18 m + 15 m soit 33 m

2) Les droites (OH) et (LK) sont verticales et donc parallèles. Par ailleurs les points M, L et O sont alignés, les points M, K et H le sont également. On peut donc appliquer le théorème de Thalès à la figure constituée des triangles MLK et MOH. Il en résulte que :

$$\frac{MH}{MK} = \frac{OH}{LK}$$
$$\frac{MH}{MH-3} = \frac{0,8}{LK}$$
$$MH \times LK = 0,8MH - 2,4$$

a) Si la hauteur LK, mesurée en mètre est égale à 0,76 on a :

$$MH \times 0,76 = 0,8MH - 2,4$$
$$0,04MH = 2,4$$
$$MH = \frac{2,4}{0,04} = 60$$

Le véhicule ne respecte pas la consigne de sécurité puisque la portée des feux de croisement est supérieure à 45 m.

b) Calculons la valeur de LK pour laquelle la portée est égale à 45 m.
On a alors (si LK est exprimé en m) :

$$45LK = 0{,}8 \times 45 - 2{,}4$$

$$45LK = 36 - 2{,}4$$

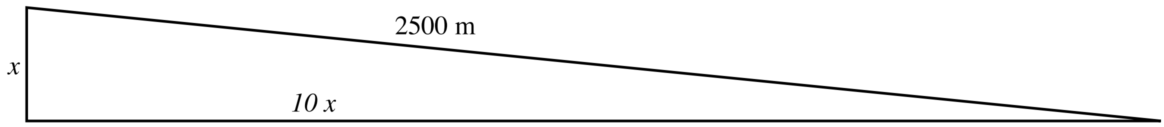
$$LK = \frac{33{,}6}{45}$$

Si on exprime maintenant LK en cm, on obtient :

$$LK = \frac{3360}{45} = \frac{1120}{15} = \frac{224}{3} = 74 + \frac{2}{3}$$

L'arrondi au cm de la plus grande longueur LK respectant la longueur de sécurité est donc 75…
mais la plus grande valeur entière de LK respectant la longueur de sécurité est 74 cm.
La réponse obtenue en prenant le mot arrondi dans son sens mathématique strict n'est pas la réponse correcte du point de vue pratique : pour LK = 75 cm, on obtient HM = 48, la valeur maximum est dépassée de 3 m.
Par ailleurs, l'énoncé ne précise nulle part que le sol doit être horizontal.
S'il ne l'est pas, la plus courte distance entre les verticales (OH) et (LK) se mesure sur une perpendiculaire commune, qui est horizontale. On a encore MH= MK + KH, en revanche HK n'est plus égal à 3, le calcul n'est donc plus correct.

3.



Le schéma ci dessus représente la route dont il est question.
Les longueurs sont exprimées en mètres. Le triangle étant rectangle, on a

$$x^2 + 100x^2 = 2500^2$$

$$101x^2 = 6\,250\,000$$

$$x^2 = \frac{6\,250\,000}{101}$$

$$x = \sqrt{\frac{6\,250\,000}{101}} \approx 248{,}76$$

la valeur arrondie au mètre près du dénivelé est donc de 249 mètres.

Partie B
1) Faux :le nombre total d'accidents étant supérieur à 76000, 25% (c'est à dire un quart) de ce total est supérieur à 19000. Chacune des quatre dernières heures de la journé ayant un nombre d'accident inférieur à 4000, leur somme ne peut pas être supérieure à 19000.

2) et 3)
L'observation de ce tableau plonge dans la perplexité.
Comment impose-t-on au tableur d'afficher des entiers dans la ligne des fréquences ?
Deux méthodes principales sont en concurrence :

a) On utilise la fonction «arrondi», dans ce cas la valeur contenue dans les cellules B3 et C3 est bien le nombre 2, obtenu en B3 comme arrondi d'un nombre valant environ 1,91 et obtenu en C3 comme arrondi de 1,508 environ.
Avantage : les nombres affichés sont ceux que l'ordinateur utilisera si on fait référence à cette cellule.

Inconvénient : ces nombres sont beaucoup plus éloignés des valeurs exactes que celles calculées par l'ordinateur avant l'arrondi ce qui est gênant si on réutilise cette cellule pour d'autres calculs.

b) On garde la valeur calculée dans la cellule mais on utilise les fonctions d'affichages pour montrer un entier.
Avantage : si on fait référence à cette cellule le calcul se fera à partir de valeurs précises. Inconvénient : le nombre réellement contenu dans la cellule n'est pas celui qui est affiché.

Le nombre 4 affiché en cellule C4 ne peut s'expliquer que si il est obtenu par 2 + 2, ce qui suppose que les nombres ont été arrondis sur la ligne 3 (méthode a ci-dessus) et que la formule utilisée en C4 est du type «= B4 + C3».
En effet, toute méthode correcte du nombre contenu en C4 (c'est à dire sans faire d'arrondis à la ligne 3, ou bien en calculant directement à partir des nombres de la ligne 2, donne un résultat proche de 3,41.
Que ce nombre soit ensuite arrondi dans la cellule ou seulement à l'affichage, l'affichage sera 3
Malheureusement cette interprétation n'est pas cohérente avec la suite du tableau, en particulier avec les cellules dont il est question à la question 3.
La conclusion est probablement que la feuille de tableur qu'on propose aux candidats est une vraie-fausse feuille de calcul : certaines valeurs ont été calculées par ailleurs et rentrées directement dans la feuille de calcul sans utiliser de formules.
Je souhaite vivement être démenti et qu'on me fournisse les formules qui expliqueraient l'ensemble des valeurs trouvées à la ligne 4.
Dans le cas contraire, on ne pourrait qu'être choqué qu'on demande à des candidats de faire preuve sur le papier d'une certaine maitrise du tableur alors que les rédacteurs du sujet, qui disposent d'un tableur n'en aurait pas fait preuve.

Partie C

1) En utilisant les notations proposées par l'énoncé, on peut traduire les données concernant la consommation par $0{,}05(x)+0{,}042y=16{,}3$

On a par ailleurs $x+y=350$, soit $x=350-y$

On peut donc remplacer x par *350 - y* dans la première équation, on obtient alors :

$0{,}05(350-y)+0{,}042y=16{,}3$

$17{,}5-0{,}05y+0{,}042y=16{,}3$

$-0{,}008y=-1{,}2$

$y=\dfrac{-1{,}2}{-0{,}008}=\dfrac{1200}{8}=150$

On en déduit que l'automobile a parcouru 200 km en ville et 150 km en zone mixte.

2) Le véhicule classique consommera 25 litres de carburant (200 : 8) pour le trajet en ville et 15 litres pour le trajet en zone mixte, soit 40 litres en tout.
L'économie réalisée par l'automobile hybride est donc de 40 - 16,3 = 23,7 litres.

Problème 2

1 a) $\overline{102} = 1 \times 3^2 \quad + \quad 0 \times 3 \quad + \quad 2 \quad = 9 + 2 = 11$, donc l'écriture en base 3 de 11 est $\overline{102}$.

b) $74 = 27 + 27 + 9 + 9 + 2 = \quad 2 \times 3^3 \quad + \quad 2 \times 3^2 \quad + \quad 0 \times 3 \quad + \quad 2$

donc 74 s'écrit $\overline{2202}$ en base 3

c) un nombre dont l'écriture en base trois se termine par 0 est la somme de termes tous multiples de 3, il est donc multiple de 3.

2)a) 100 = 1 x 81 + 0 x 27 + 2 x 9 + 0 x 3 + 1 et s'écrit donc $\overline{10201}$ en base 3.
On cherche combien il existe de nombres 2-lacunaires inférieurs à $\overline{10201}$.
Considérons les nombres qui s'écrivent avec 5 chiffres ou moins en base 3.
Si on décide de les écrire tous avec 5 chiffres, en ajoutant au besoin à gauche des 0 inutiles, on obtient 32 nombres différents de $\overline{00000}$ à $\overline{11111}$ puisque chaque chiffre peut être choisi de deux façons (0 ou 1)
Parmi ces 32 nombres, ceux qui commencent par deux chiffres 1 sont supérieurs à $\overline{10201}$, les autres sont inférieurs. Il y a huit nombres à 5 chiffres commençant par deux chiffres 1 puisque chacun des autres chiffres peut être choisi de deux façons différentes.
Il y a donc 32 - 8 = 24 nombres 2-lacunaires entre 0 et 100.

Autre méthode : après avoir déterminé 100 s'écrit $\overline{10201}$ en base 3, on écrit par ordre croissant tous les nombres 2-lacunaires inférieurs à $\overline{10201}$

$\overline{0}$ $\overline{1}$ $\overline{10}$ $\overline{11}$ $\overline{100}$ $\overline{101}$ $\overline{110}$ $\overline{111}$

$\overline{1000}$ $\overline{1001}$ $\overline{1010}$ $\overline{1011}$ $\overline{1100}$ $\overline{1101}$ $\overline{1110}$ $\overline{1111}$

$\overline{10000}$ $\overline{10001}$ $\overline{10010}$ $\overline{10011}$ $\overline{10100}$ $\overline{10101}$ $\overline{10110}$ $\overline{10111}$

Le nombre 2-lacunaire suivant est $\overline{11111}$, il est trop grand, il y a donc 24 nombres qui conviennent.

b) dans un nombre n 2-lacunaire les coefficients a_i valent 0 ou 1.
Si le coefficient vaut 1, le terme correspondant de la somme définissant n vaut 3^i qui est un nombre impair. Si le coefficient vaut 0, le terme correspondant de la somme est nul.
Un nombre 2-lacunaire est donc pair si et seulement si il figure un nombre pair de chiffres 1 dans son écriture (ceci est vrai quelque soit le nombre de chiffres, et donc en particulier pour 4).

3) a)
Un nombre 1-lacunaire s'écrit avec uniquement des 2 et des 0.
Il suffit de remplacer chaque 2 par un 1 sans modifier les 0 pour obtenir le nombre 2-lacunaire dont le nombre 1-lacunaire donné est le double.

b) Considérons un nombre n écrit en base 3.
Il existe un nombre 2-lacunaire obtenu en remplaçant dans l'écriture de n les 2 par des 0 sans changer les autres chiffres puis en supprimant le cas échéant les 0 situés à gauche de l'écriture.
Il existe un nombre 1-lacunaire obtenu en remplaçant dans l'écriture de n les 1 par des 0 sans changer les autres chiffres puis en supprimant le cas échéant les 0 situés à gauche de l'écriture.
La somme de ces deux nombres est égale à n. CQFD
Exemple : $\overline{1202211} = \overline{1000011} + \overline{202200}$

c) $\overline{1}+\overline{2}=\overline{10}$ $\overline{10}+\overline{0}=\overline{10}$ la décomposition n'est donc pas toujours unique.

Conclusions :

1) Ce problème ferait un bon début pour une épreuve de capes. Il est regrettable que les auteurs du sujet n'aient pas été informés qu'il s'agissait de recruter des professeurs d'école polyvalents.

2) Les IUFM ont souvent été critiqués pour une tendance réelle ou supposée à jargonner.
En tant que professeur d'IUFM, l'auteur de ce corrigé remplacerait volontiers :

On s'intéresse aux nombres entiers n dont aucun chiffre de l'écriture en base 3 ne prend la valeur 2.
On appellera ces nombres des entiers 2-lacunaires.
Déterminer le nombre d'entiers 2-lacunaires compris entre 0 et 100

par :

Combien d'entiers compris entre 0 et 100 s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 2 ?

Je laisse chacun juger où est le jargon.