Corrigé non officiel de la partie mathématique de l'épreuve écrite du CRPE, session 2011, groupement d'académies 3

Exercice 1
1) L'affirmation est fausse.
La somme des âges des 20 personnes est égale à 9 x 25 + 11 x 45 = 720
Pour que la moyenne soit de 35 ans, il faudrait que cette somme soit égale à 700.

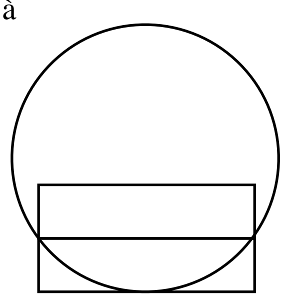
2) L'affirmation est vraie.
Il y a 3 choix possibles pour le pantalon, et 4 choix de tee-shirt pour chaque choix de pantalon, il y a donc 3 x 4 = 12 façons possible de se vêtir.
Parmi celles-ci, il y en a deux qui sont monochrome (rouge ou bleu).
La probabilité d'être habillé d'une seule couleur est donc égale à $\frac{2}{12}$ c'est à dire à $\frac{1}{6}$.

3) L'affirmation est vraie.
Les angles inscrits $\widehat{ADC}$ et $\widehat{ABC}$ interceptent le même arc donc ils sont égaux et $\widehat{ABC}$ mesure 50°
Le triangle ABC a un angle de 40° et un angle de 50°. Son troisième angle, $\widehat{BAC}$ mesure donc 180°-(40°+50°) soit 90° par conséquent le triangle ABC est rectangle en A.

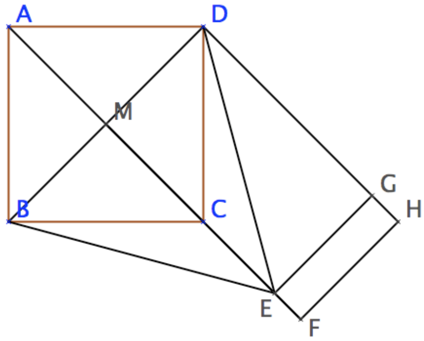
4) L'affirmation est vraie.
Cette section est toujours un rectangle dont deux côtés mesurent 8 cm (hauteur du cylindre).
Les deux autres côtés sont des cordes des bases. Celles-ci ayant un rayon de 5 cm il est possible que les cordes mesurent 8 cm. Dans ce cas la section est un carré.

5) L'affirmation est vraie.
En 21 heures, le robinet A viderait 3 cuves identiques.
En 21 heures, le robinet B viderait 7 cuves identiques.
En semble, les deux robinets videraient 10 cuves en 21 heures, soit une cuve en 2,1 heures, ou 2 heures 6 minutes.

6) L'affirmation est fausse.
Le graphique représente une situation ou le volume de liquide est proportionnel à la hauteur, ce qui n'est pas le cas pour cette carafe.
Si on veut pousser plus loin l'explication, on peut songer à deux cylindres de même hauteur représentés ici par deux rectangles.
Soit h la hauteur d'un de ces cylindres. Le volume contenu dans la carafe pour une hauteur h est inférieur à celui du cylindre.
Le volume ajouté pour passer d'une hauteur h de liquide à la hauteur 2h est supérieur à celui du cylindre. Le volume n'a donc pas doublé quand la hauteur a doublé, ce qui prouve qu'il n'y a pas proportionnalité.



Exercice 2
2)a) Si on choisit le côté [BD] comme base du triangle BDE, la hauteur associée est [ME]. l'aire de BDE est alors égale à $\frac{1}{2}BD \times ME$
or dans un carré les diagonales se coupent en leur milieu, donc
$\frac{1}{2}BD = DM$ L'aire de BDE est donc égale à $DM \times ME$ soit l'aire de MDGE.



b) L'aire du carré est double de celle de ADC, elle est donc égale à $AC \times DM$.
F étant le symétrique de M par rapport à C, on a MF = 2 MC donc MF = AC.
L'aire du carré est donc égale à $MF \times DM$ c'est à dire à l'aire de MDHF.

c) Le rectangle MDHF a une aire supérieure à celle de MDGE qu'il contient.
Il résulte de cette constatation et des égalités prouvées aux questions précédentes que l'aire du carré est supérieure à celle de BDE.

3) a)
Si le côté du carré mesure c, sa diagonale [BD] mesure $c\sqrt{2}$

Comme BDE est équilatéral, on a DE $=c\sqrt{2}$, et comme M est le milieu de [BD], DM $=\dfrac{c\sqrt{2}}{2}$

Dans le triangle rectangle DME, le théorème de Pythagore permet d'affirmer que

$$DE^2 = DM^2 + ME^2$$

$$ME^2 = DE^2 - DM^2$$

$$ME^2 = \left(c\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$ME^2 = 2c^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{3c^2}{2}$$

$$ME = c\sqrt{\frac{3}{2}}$$

L'aire de BDE est alors égale à $\dfrac{c\sqrt{2} \times c\sqrt{\dfrac{3}{2}}}{2} = \dfrac{c^2\sqrt{3}}{2}$

b) Comme $\sqrt{3}$ est inférieur à 2, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est inférieur à 1.

Il en résulte que l'aire de BDE est inférieure à c^2 c'est à dire à l'aire du carré ABCD.

4) L'aire du carré ABCD est égale à celle du rectangle DMFH, elle est donc égale au double de l'aire du tringle DMH.
Le triangle BDP a le côté [DM] en commun avec DMH et son aire doit être le double de celle de DMH, il faut et il suffit pour cela que la [MP], hauteur relative à [DM] ait une longueur double de MF. Pour cela, il faut et il suffit que P soit le symétrique de M par rapport à F.

Exercice 3
1) 52 = 4 x 13, 52 est donc divisible par 4 et le nombre étudié l'est également, en application du critère donné par l'énoncé.

2) a) L'écriture de n proposée est toujours possible puisqu'il s'agit de l'égalité caractéristique de la division euclidienne de n par 100, q désignant le quotient et r le reste.

b) Si r est divisible par 4, il existe un entier k tel que r = 4 k.
On a alors n = 4 (25 q) + 4 k = 4 (25 q + k), ce qui montre que n est multiple de 4 puisque 25q + k est un entier.

c) Si n est divisible par 4, il existe un entier p tel que n = 4p.
On a alors 4p = 100q + r d'où r = 4p - 100q = 4p - 4 (25q) = 4 (p - 25q)
p et q étant entiers, p-25q l'est également donc r est multiple de 4.

d) le nombre composé des deux derniers chiffres d'un nombre ayant au moins deux chiffres est le reste de sa division par 100, le critère résulte donc directement des deux questions précédentes.

3) a)
Soit N un nombre entier naturel ayant au moins 3 chiffres, N est divisible par 8 si et seulement si le nombre composé des trois derniers chiffres de N est divisible par 8.

Comme 1000 = 8 x 125, on prouve de la même façon qu'aux questions précédentes que N est divisible par 8 si et seulement si son reste dans la division par 1000 est divisible par 8.
Le nombre constitué des trois derniers chiffres de N étant le reste de la division euclidienne de N par 1000, cela prouve la validité du critère.

b) 552 = 560 - 8 = 8 (70 - 1) donc 552 est divisible par 8 par conséquent le nombre proposé l'est aussi.

4) a) un nombre entier naturel N ayant au moins p chiffres est divisible par 2^p si et seulement si le nombre constitué par ses p derniers chiffres est divisible par 2^p

Démonstration :
Le nombre constitué des p derniers chiffres de N est le reste de la division euclidienne de N par 10^p
Comme $10^p = 5^p \times 2^p$, 10^p est divisible par 2^p
La preuve résulte alors du même type de calculs qu'aux questions 1)b) et 1)c).
(remarque : le critère obtenu en remplaçant 2^p par 5^p dans la réponse à la question 4)a) est vrai également et se démontre de la même façon).

b) Pour trouver la plus grande puissance de 2 qui divise le nombre R = 123 412 893 135 552

on effectue successivement à la calculatrice les divisions suivantes :
5552 : 16 = 347, c'est un entier, donc 5552 est divisible par 16 et R également.
35 552 : 32 = 1111, c'est un entier, donc 35 552 est divisible par 32 et R également.
135 552 : 64 = 2118, c'est un entier, donc 135 5552 est divisible par 64 et R également.
3 135 552 : 128 = 24 496,5 donc 3 135 552 n'est pas divisible par 128 et R non plus.

Conclusion : la plus grande puissance de 2 qui divise le nombre 123 412 893 135 552 est 64, c'est-à-dire 2^6 .