Corrigé officieux de l'épreuve de mathématiques du CRPE
session 2010, académie de Nantes.

Les parties en italique de ce corrigé sont des compléments qui n'étaient probablement pas attendus des candidats.

Exercice n° 1

Si un prix passe de 35€ à 33€, la baisse de prix représente $\frac{2}{35}$ du prix initial.

or, $\frac{2}{35} \approx 0{,}0571428$ (valeur obtenue à la calculatrice)

la baisse est donc d'environ 5,71%.

Soit P le prix en € hors taxe du repas avant la baisse de la TVA.
L'ancien prix taxe comprise était 35€, on avait donc 1,196 P = 35
donc $P = \frac{35}{1{,}196}$

Le prix en appliquant la nouvelle taxe de 5,5% devrait être égal à 1,055 P, soit $1{,}055 \times \frac{35}{1{,}196}$

Si le restaurateur avait répercuté intégralement la baisse de la TVA,
le nouveau prix serait de 30,87 €.

Exercice n°2

Dans la cellule B2, on peut écrire la formule suivante : = 100 - A2

Dans la cellule E2, on peut écrire la formule suivante : = D2 - C2

La feuille de tableur suggère la conjecture suivante :
Si deux nombres ont pour somme 100 et qu'on soustrait 5 à chacun d'entre eux, alors leur produit diminue de 475.

Démonstration :
soit x l'un des deux nombres. L'autre est alors égal à 100 - x

Leur produit est égal à $x\,(100 - x)$

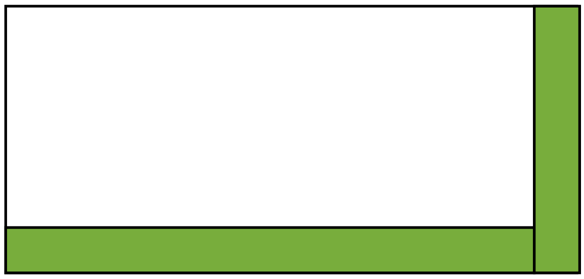
Après qu'on ait soustrait 5 à chacun des deux nombres, le produit devient

$$\begin{aligned}(x - 5)\,(\,(100 - x) - 5) &= x\,(100 - x) - 5x - 5\,(100 - x) + 25\\ &= x\,(100 - x) - 5x - 500 + 5x + 25\\ &= x\,(100 - x) - 475\end{aligned}$$

Ce qui montre que le produit a diminué de 475.

Autre démonstration, qui a l'avantage de s'appuyer sur les connaissances de l'école élémentaire mais qui n'est valable que si les deux nombres considérés sont supérieurs à 5 (or, malheureusement, la feuille de tableur proposée envisage des nombres inférieurs à 5)

Supposons que les deux nombres dont la somme est 100 soient les dimensions de ce rectangle (parties blanches et grisées).



Supposons de plus que les petits rectangles grisés aient pour largeur 5.
Alors le produit des nombres donnés est la mesure de l'aire du grand rectangle, le produit après diminution est la mesure de l'aire du rectangle blanc.
La valeur du produit a donc diminué d'une valeur égale à l'aire totale des deux rectangles grisés.
Or on peut assembler ces deux rectangles en un seul rectangle de largeur 5 et de longueur égale à 95 (largeur du grand rectangle + (Longueur - 5))
L'aire grisée mesure donc 5 x 95 = 475, la valeur du produit diminue donc bien de 475.

Question complémentaire.

Cette séance ne peut être menée qu'en clsse de CM2 car c'est à ce niveau que figure l'objectif de diviser mentalement un nombre entier ou décimal par 10 100 ou 1000.
Or il s'agit bien de calcul mental, car même si les élèves écrivent leur résultat, ils l'écrivent en ligne, sans poser d'opération.
Les trois premières opérations pourraient être proposées en CM1.

Les différences de réussite s'expliquent essentiellement par la présence de nombres non entiers soit dans l'énoncé de la question soit dans le résultat, ce qui est normal puisque les nombres décimaux ne sont introduits qu'en CM1, et donc encore relativement récents.
Par ailleurs (comme les productions d'élèves le confirmeront) une des principales difficultés concernant les multiplications et divisions d'un décimal par 10, 100 ou 1000 consiste présisément à ne pas utiliser les règles connues pour les entiers et valables seulement pour eux.
En revanche, les difficultés ne sont dues que pour quelques élèves à la présence de division.
3500 : 10 est beaucoup mieux réussi que 2,3 x 10.

Les trois élèves semblent tenter d'appliquer ou d'adapter une règle correcte pour les nombres entiers : pour multiplier un nombre entier par 10, il suffit d'ajouter un 0 à droite dans l'écriture de ce nombre.
Toutefois, l'utilisation de cette règle n'est pas la même :
Théo l'applique strictement et trouve 2,30. Il ne remarque pas que le nombre obtenu est compris entre 2 et 3 et ne peux donc pas être égal à 10 x 2,3.
La réponse de Younes peut s'expliquer par un raisonnement du type «2,3 c'est un peu plus que 2 donc 10 fois 2,3 c'est un peu plus que 10 fois 2, c'est un peu plus que 20». La partie décimale n'est pas multipliée, la réponse de Younes tient compte de l'ordre de grandeur.
La réponse de Sarah peut s'expliquer par un raisonnement du type «2,3 c'est 2 et 3 petits morceaux donc 10 fois 2,3 c'est 20 et 30 petits morceaux». Cette réponse tente de multiplier la partie décimale du nombre, mais sans prendre en compte la signification de la place des chiffres après la virgule. Il se peut aussi que Sarah traîte le nombre décimal comme deux entiers de part et d'autre de la vigule.

Théo semble appliquer les règles suivantes :

Pour multiplier un nombre par 10, j'ajoute un zéro à droite.
Pour diviser un nombre par 10 j'enlève un zéro à droite.
Pour multiplier un nombre par 100, j'ajoute deux zéros à droite.

On peut donc supposer qu'il cherche à appliquer pour 2130 : 100 la règle

Pour diviser un nombre par 100 j'enlève deux zéros à droite.

Comme cette règle ne peut pas s'appliquer strictement puisqu'il n'y a qu'un seul zéro, Théo se contente d'enlever ce zéro.

Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.

Sarah semble également raisonner par ajout et retrait de zéros à l'écriture des nombres.
Le nombre proposé ne comportant aucun zéro, cette méthode est inaplicable.

Exercice n° 3
Si on se déplace à vitesse constante et qu'on parcourt 100m en 9,58 secondes
alors en une seconde on parcourra $\frac{100}{9{,}58}$ mètres.

En une heure, soit 3600 secondes, on parcourra $3600 \times \frac{100}{9{,}58}$ mètres soit environ 37578 m.

La vitesse en km/h d'Usain Bolt lors du 100 m était donc d'environ 37,58 km/h.

Si on se déplace à vitesse constante et qu'on parcourt 200m en 19,19 secondes
alors en une seconde on parcourra $\frac{200}{19{,}19}$ mètres.

En une heure, soit 3600 secondes on parcourra $3600 \times \frac{200}{19{,}19}$ mètres soit environ 37519 m.

La vitesse en km/h d'Usain Bolt lors du 200 m était donc d'environ 37,52 km/h.

Paul court à la vitesse moyenne de 30 km/h.
Il parcourt donc un km en 2 minutes (ou 120 scondes) et 100 m en 12 secondes.
Or Usain Bolt, parti 2 secondes après Paul, franchirait la ligne d'arrivée 11,58 secondes après le départ de Paul.
Paul arrivera donc après Usain Bolt.

Pour arriver en même temps qu'Usain Bolt, Paul devrait courir le 100 m en 11, 58 secondes ce qui correspond à une distance de $3600 \times \frac{100}{11{,}58}$ mètres en une heure, soit environ 31088 m.

La vitesse de Paul devrait donc être d'environ 31,09 km/h.

Etait-il vraiment nécessaire de demander aux candidats trois fois le même calcul ?

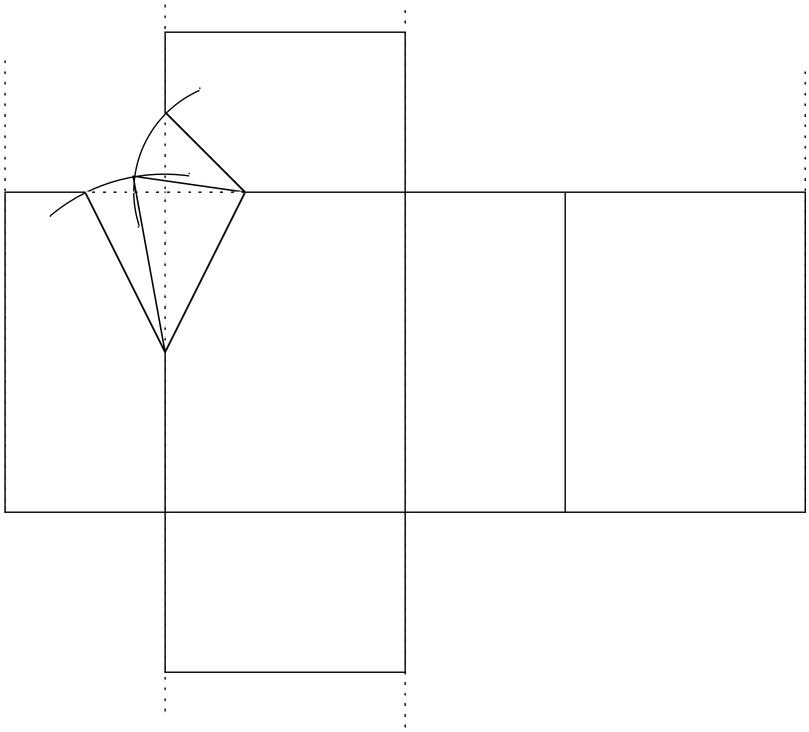
Exercice n° 4

Soit O le sommet manquant du parallélépipède ABCDEOIJ
Les triangles FGO GHO et FHO sont alors des triangles rectangles dont on peut calculer les dimensions :
FO = EO - EF = AB - EF = 2 cm - 1 cm = 1 cm
GO = BO - BG = EA - BG = 4 cm - 2 cm = 2 cm
HO = IO - HI = BC - HI = 3 cm - 2 cm = 1 cm

Les triangles FGO et HGO sont alors deux triangles rectangles dont un côté de l'angle droit mesure 1 cm et l'autre 2 cm. Ces deux triangles sont donc superposables, leurs hypoténuses [FG] et [GH] ont donc la même longueur, il en résulte que le triangle FGH est isocèle en G.

En utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles FOH et FOG, on trouve que
FH = $\sqrt{2}$ donc FH ≈ 1,41 cm et FG = $\sqrt{5}$ donc FG ≈ 2,24 cm (de plus on sait que GH = FG)

Voici un patron possible du parallélépipède tronqué.
Les candidats n'ont aucune raison d'avoir adopté la disposition proposée ici, tout patron correct sera accepté.



Le volume du solide étudié peut être obtenu en soustrayant du volume du pavé complet le volume de la pyramide qui en a été enlevée.

Volume du pavé complet : 2 x 3 x 4 = 24 cm^3

Calcul du volume de la pyramide FGHO en utilisant le triangle FOH comme base. [OG] est alors la hauteur.

Aire de la base = $\frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$ cm^2 Volume de la pyramide = $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times 2\right) = \frac{1}{3}$ cm^3

Volume du pavé tronqué = 24 - $\frac{1}{3} = \frac{71}{3}$ cm^3

La partie évidée est un polyèdre ayant 5 sommets dont 4 sont dans le même plan, c'est donc une pyramide.
Les faces latérales de cette pyramide sont des triangles isocèles (superposables au triangle FGH)
La base de la pyramide est un carré. En effet, elle est obtenue en assemblant par le sommet de l'angle droit 4 triangles rectangles isocèles superposables à FOH, il s'agit donc d'un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu, même longueur et sont perpendiculaires, c'est donc un carré.
Ce qui doit être justifié n'est pas particulièrement clair (doit on par exemple justifier que 4 sommets sont dans le même plan ?)

Question complémentaire.

1) Parmi les caractéristiques pouvant être dégagées à l'issue de la première phase on peut citer :

- Le patron doit avoir autant de faces que l'objet réel (c'est à dire 7).
- Les formes des faces sont les mêmes que sur l'objet (trois carrés, trois carrés tronqués, un triangle équilatéral)
- Le patron doit être en un seul bloc.
- Les faces doivent être assemblées par leurs côtés.

On rappelle que généralement le barême du CRPE pénalise le fait de fournir plus de réponses qu'il n'en est demandé. Il est demandé aux élèves des schémas à main levée, de plus les élèves ne sont pas invités dans cette *phase à découper et plier leur production, il est donc peu probable que des caractéristiques telles que «les arêtes qui s'assemblent doivent avoir la même longueur» soit dégagées à ce stade.*

2a Le choix qu'on demande de justifier peut se décomposer en trois sous-choix :
- Fournir des gabarits.
- Fournir d'autres formes planes en plus des gabarits nécessaires.
- Ne fournir qu'un exemplaire de chaque forme.

Un premier argument justifiant ce choix est qu'il libère les élèves de la complexité du tracé de certaines faces. Les élèves peuvent ainsi mieux se concentrer sur l'analyse du solide, le nombre et la nature de ses faces et la disposition à adopter pour obtenir un patron. Cet argument porte en fait sur le premier sous-choix.

Un second argument est que l'existence d'un seul gabarit de chaque forme ainsi que la présence de formes étrangères laisse à l'élève une grande part de responsabilité dans l'analyse du solide. Si le maître fournissait les 7 gabarits correspondant aux 7 faces, la tâche des élèves serait réduite à les disposer correctement (ce qui ne serait tout de même pas insignifiant). Cet argument porte sur les deuxièmes et troisième sous-choix.

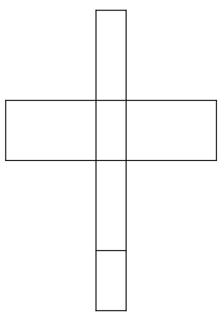
2b Le maître peut fournir aux élèves un exemplaire du solide assemblé (ce qui permet en le manipulant de voir toutes les faces alors qu'on ne voit qu'une partie des faces du solide exposé pour toute la classe).

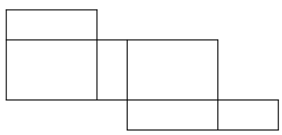
Il peut également fournir les modèles de faces en grand nombre (plus que nécessaire) et proposer aux élèves de réaliser le patron en assemblant les faces à l'aide d'adhésif. Ainsi les élèves ont toujours la responsabilité de l'analyse du solide (combien de faces de telle forme…) mais ils sont totalement libérés des soucis de tracé et peuvent vérifier à chaque étape si en pliant les faces assemblées tout se passe comme prévu.

3 La difficulté particulière de cette activité vient du fait que le solide à constuire n'est pas un objet matériel, on doit imaginer qu'il bouche le trou. Cela entraine entre autre l'impossibilité de le tourner dans tous les sens pour l'observer (et par exemple de placer la pyramide dans sa position la plus usuelle, sommet en haut).

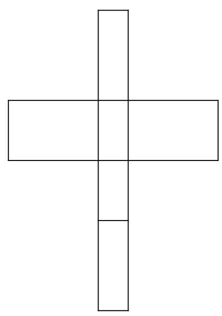
4 Voici une formulation possible de cette trace écrite.
- Le patron d'un solide est un dessin fait à plat.
- En découpant et en pliant le dessin on doit obtenir le solide.
- Le patron est en un seul morceau, toutes les faces du solide sont dessinées sur le patron.
- Pour un même solide, il y a plusieurs patrons possibles…
- …mais si on dispose les faces au hasard ça ne donne en général pas un patron.

Voici deux patrons différents
du même pavé droit…





et un assemblage des mêmes
rectangles qui n'est pas un patron.



Yves Thomas, IUFM des Pays de la Loire, site de Nantes.