Corrigé (non officiel) de la partie mathématique de l'épreuve de mathématique et sciences.
CRPE session 2012, groupement académique 1, 28 septembre 2011

Les parties en italique sont soit des commentaires soit des méthodes alternatives. Le texte obtenu en supprimant les italiques est supposé rapporter la totalité des points.

Exercice 1

L'affirmation 1 est fausse.
Justification : Prenons l'exemple du nombre 0,01 sa racine carrée est 0,1 elle est supérieur à 0,01 ce qui contredit l'affirmation

L'affirmation 2 est fausse.
Justification : Le numérateur est multiple de 3 car la somme de ses chiffres est 30, multiple de 3.
Le dénominateur est multiple de 3 car la somme de ses chiffres est 39, multiple de 3.
En conséquence, la fraction peut être simplifiée par 3, elle n'est pas irréductible.

L'affirmation 3 est fausse.
Justification : la probabilité est le rapport du nombre d'issues favorables (ici 20) sur le nombre total d'issues (ici 55) elle est donc égale à $\frac{20}{55}$ soit $\frac{4}{11}$.

L'affirmation 4 est fausse.
Justification : 30% de 25 millions, c'est 7 500 000.
«30% de plus qu'en 2009» correspond donc à 32 500 000
32 800 000 c'est donc plus de 30% de plus qu'en 2009 et non 23,8%.

L'affirmation 5 est vraie.
10900 = 20 x 545
11445 = 21 x 545 = 3 x 7 x 545 or 2180 = 2 x 2 x 545.
545 n'est pas premier, mais cette décomposition suffit à montrer que le pgcd de 11445 et 2180 est 545.

L'affirmation 6 est fausse.
Dans un agrandissement de coefficient k, les aires sont multipliées par k^2 et les volumes par k^3.
Dans l'agrandissement qui transforme la petite boule en la grande, la masse est multipliée par 8.
Les boules étant pleines, leur masse est proportionnelle à leur volume par conséquent, dans cet agrandissement le volume est multiplié par 8
On en déduit que $k^3 = 8$ donc $k = 2$ et $k^2 = 4$
L'aire étant quadruplée, la quantité de peinture l'est aussi, la quantité de peinture nécessaire pour la petite boule est donc le quart de celle utilisée pour la grosse, c'est 225 grammes et non 112,5.

Exercice 2

1.a) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ donc le triplet (3, 4, 5) est pythagoricien.

b) $(3n)^2 + (4n)^2 = 9n^2 + 16n^2 = 25n^2 = (5n)^2$

c) Il résulte de la question précédente que pour tout n entier positif non nul, le triplet (3n, 4n, 5n) est pythagoricien. C'est en particulier le cas du triplet (3000, 4000, 5000).

2. a) On peut entrer dans le cellule D2 la formule =B2*B2-A2*A2

b)

x	y	a	b	c	$a^2 + b^2$	c^2
4	5	40	9	41	1681	1681

c) Dans chacune des lignes du tableau, le triplet (a, b, c) est pythagoricien, on peut donc conjecturer que cette propriété est générale, que les triplets obtenus comme indiqué à la question 2 sont tous pythagoriciens.

justification : on sait que $a = 2xy$; $b = y^2 - x^2$; $c = y^2 - x^2$

x et y étant des entiers positifs non nuls tels que $x<y$, les nombres a, b et c sont eux mêmes des entiers positifs non nuls.

$$a^2 = (2xy)^2 = 4x^2y^2$$

Par ailleurs, $b^2 = \left(y^2 - x^2\right)^2 = y^4 + x^4 - 2x^2y^2$

$$c^2 = \left(y^2 + x^2\right)^2 = y^4 + x^4 + 2x^2y^2$$

Il en résulte que $a^2 + b^2 = \quad 4x^2y^2 \quad + \quad y^4 + x^4 - 2x^2y^2 \quad = \quad y^4 + x^4 + 2x^2y^2 \quad = \quad c^2$

ce qui montre que le triplet (a, b, c) est pythagoricien.

3. Considérons un triplet pythagoricien constitué de trois entiers consécutifs que nous noterons n-1 n et n+1

Le triplet est pythagoricien, donc :

$$(n-1)^2 + n^2 \quad = \quad (n+1)^2$$

$$n^2 - 2n + 1 + n^2 \quad = \quad n^2 + 2n + 1$$

$$n^2 \quad - 4n \quad = \quad 0$$

$$n(4-n) \quad = \quad 0$$

Un produit de deux nombres est nul si et seulement si un des deux nombres est nul, l'équation a donc deux solutions, 0 et 4. Les triplets pythagoriciens étant constitués de nombres entiers strictement positifs, seule la valeur 4 convient. n = 4 correspond au triplet pythagoricien (3, 4, 5) qui est donc le seul triplet pythagoricien composé de nombres entiers consécutifs.

Remarque : le type d'équation obtenu (produit égal à 0) est le seul type d'équation du second degré figurant au programme du collège. Or, si on ne choisit pas le nombre central comme inconnue, on obtient une équation plus complexe…

Exercice 3

1. Les triangles AHC et BHC sont rectangles en C. Le théorème de Pythagore permet donc d'affirmer que :

$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 169 - AH^2$

et que

$CH^2 = BC^2 - BH^2 = 225 - (14 - AH)^2 = 225 - (196 - 28AH + AH^2) = 29 + 28AH - AH^2$

En rapprochant les deux expressions obtenues pour CH^2 on obtient :

$$29 + 28AH - AH^2 \quad = \quad 169 - AH^2$$

$$28AH \quad = \quad 140$$

$$AH \quad = \quad \frac{140}{28} \quad = \quad 5$$

Il en résulte que $CH^2 = 169 - 25 = 144$ donc que CH = 12.

2. a) Le point K se déplace sur [AH].
La plus petite valeur de KL est obtenue quand K et A sont confondus. On a alors KL = 0 et KN = 14. Cette situation, dans laquelle le rectangle est aplati et réduit au segment [AB] est représentée sur le graphique par le point (0 , 14) qui est une des extrémités de la représentation graphique.
La plus grande valeur de KL est obtenue quand K et H sont confondus. On a alors KL = KC = 12 et KN = 0. Cette situation, dans laquelle le rectangle est aplati et réduit au segment [HC] est représentée sur le graphique par le point (12, 0) qui est l'autre extrémité de la représentation graphique.

b) Traçons sur le graphique la bissectrice de l'angle formé par les deux axes. Tous les points de cette bissectrice se caractérisent par le fait que leur abscisse et leur ordonnée sont égales.
L'intersection de cette bissectrice avec la représentation graphique fournit un point tel que KL = KN. KLMN est alors un carré.
En lisant sur le graphique les coordonnées du point d'intersection, on constate que KLMN est un carré pour une valeur de KL et de KN comprise entre 6 et 7.

3.a) (KL) et (CH) sont perpendiculaires à (AB), elles sont donc parallèles entre elles.
Considérons les triangles AHC et AKL.
K est sur (AH), L est sur (AC) et (KL) est parallèle à (CH), il s'agit donc d'une configuration de Thalès dans laquelle on a : $\frac{AK}{AH} = \frac{KL}{CH}$ d'où $\frac{AK}{5} = \frac{KL}{12}$ et $AK = \frac{5}{12}KL$

Le même raisonnement appliqué aux triangles BNM et BHC conduit à $BN = \frac{9}{12}MN = \frac{9}{12}KL$

b) KN = AB - (AK + BN) = 14 - (AK + BN).
En remplaçant AK et BN par les expressions obtenues à la question précédente on obtient :

$$KN = 14 - \left(\frac{5}{12}KL + \frac{9}{12}KL\right) = 14 - \frac{14}{12}KL = 14 - \frac{7}{6}KL$$

4. Quand KLMN est un carré, on a $KN = KL$, donc :

$$KL = 14 - \frac{7}{6}KL$$

$$KL + \frac{7}{6}KL = 14$$

$$\frac{13}{6}KL = 14$$

$$KL = \frac{84}{13}$$

On a montré que $AK = \frac{5}{12}KL$

on a donc $AK = \frac{5}{12} \times \frac{84}{13} = \frac{5 \times 7 \times 12}{12 \times 13} = \frac{35}{13}$

On obtient un carré quand la distance AK est égale à $\frac{35}{13}$.