Corrigé (non officiel) de la partie mathématique de l'épreuve de mathématique et sciences.
CRPE session 2012, groupement académique 2, 28 septembre 2011

Les parties en italique sont soit des commentaires soit des méthodes alternatives. Le texte obtenu en supprimant les italiques est supposé rapporter la totalité des points.

Exercice 1

L'affirmation 1 est fausse.
Justification : prenons par exemple $a = 9$ et $b = 16$.
On a alors $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$
et $\sqrt{a+b} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
L'affirmation 1 n'étant pas vraie pour ces valeurs particulières ne peut pas être toujours vraie.

> *Il est également possible de montrer que l'affirmation est fausse sans recourir à un contre exemple, par exemple en élevant au carré $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ d'une part et $\sqrt{a+b}$ d'autre part.*
> *On obtient respectivement $a+b+2\sqrt{a}\sqrt{b}$ et $a+b$ or si deux nombres positifs ont des carrés différents, ils sont différents ce qui entraîne la fausseté de l'affirmation 1*

L'affirmation 2 est vraie.
Justification : calculons le carré de la longueur de chacun des côtés du triangle.
Le premier a pour carré a^2, le deuxième a pour carré $\frac{a^4}{4}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}$ et le troisième $\frac{a^4}{4}+\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}$

Or $\frac{a^4}{4}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4} + a^2 = \frac{a^4}{4}+\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}$

La somme des carrés de deux côtés du triangle est égal au carré du troisième côté, par conséquent le triangle est rectangle.

> *Les calculs effectués sont corrects quelle que soit la valeur de a, mais pour que les trois nombres représentent les longueurs des côtés d'un triangles, ils doivent être positifs.*
> *C'est le cas quand $a > 1$ et c'est pourquoi cette précision figure dans l'énoncé même si elle n'est pas utilisée dans le calcul.*

L'affirmation 3 est fausse.
Justification : si on effectue deux fois de suite le lancer d'une pièce, il y a quatre événements possibles et équiprobables : pile puis pile, pile puis face, face puis pile, face puis face.
La probabilité d'obtenir une fois pile et une fois face est donc $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

L'affirmation 4 est fausse.
Justification : augmenter un nombre de 20% revient à le multiplier par 1,2.
Diminuer un nombre de 20% revient à le multiplier par 0,8.

Dans le magasin A le prix a été multiplié par 0,8 puis par 1,2, il a donc été multiplié par 0,96.
Dans le magasin B le même prix a été multiplié par 1,2 puis par 0,8, il a été multiplié par 0,96.

Il en résulte que le prix final est le même dans les deux magasins.

L'affirmation 5 est fausse.
Justification : si on note c la longueur du côté du carré initial, le carré agrandi a un côté de 1,05 x c
Le périmètre du carré agrandi, est égal à 4 x 1,05 x c soit 1,05 x (4c) , or 4c est le périmètre du carré initial, qui a par conséquent augmenté de 5%.

On pouvait se contenter de dire que le périmètre du carré est proportionnel à la longueur du côté et que par conséquent, si le côté augmente de 5% il en est de même pour le périmètre.

Exercice 2

Partie A

1. $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{32}{64}+\frac{16}{64}+\frac{8}{64}+\frac{4}{64}+\frac{2}{64}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

2. $$\frac{5}{8}=\frac{4}{8}+\frac{1}{8} \text{ donc } \frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

or $8 = 2^3$, la décomposition répond donc bien aux critères fournis.

Partie B

1. $$\frac{1}{p\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{1}{q\left(\frac{p+q}{2}\right)}=\frac{q}{pq\left(\frac{p+q}{2}\right)}+\frac{p}{pq\left(\frac{p+q}{2}\right)}=\frac{q+p}{pq\left(\frac{p+q}{2}\right)}=\frac{2(q+p)}{pq(p+q)}=\frac{2}{pq}$$

2. p et q étant supposés impairs, alors p + q est pair. $\frac{p+q}{2}$ est donc un nombre entier, et ses produits par les entiers p et q sont également des entiers. cqfd

3. $15 = 3\times 5$, on peut donc utiliser la formule de la question 1 en posant p = 3 et q = 5

On obtient alors $$\frac{2}{15}=\frac{2}{3\times 5}=\frac{1}{3\left(\frac{3+5}{2}\right)}+\frac{1}{5\left(\frac{3+5}{2}\right)}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$$

$15 = 1\times 15$, on peut donc utiliser la formule de la question 1 en posant p = 1 et q = 15

On obtient alors $$\frac{2}{15}=\frac{2}{1\times 15}=\frac{1}{1\left(\frac{1+15}{2}\right)}+\frac{1}{15\left(\frac{1+15}{2}\right)}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$$

4. n étant un entier, 2n+1 est un nombre entier impair, on peut donc à nouveau utiliser la formule précédente en posant p = 1 et q = 2n+1. On obtient alors :

$$\frac{2}{2n+1}=\frac{2}{1\times(2n+1)}=\frac{1}{1\left(\frac{1+(2n+1)}{2}\right)}+\frac{1}{(2n+1)\left(\frac{1+(2n+1)}{2}\right)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

Partie C

1. $\frac{1}{7}=\frac{13}{91}$ *or* $\frac{13}{91}<\frac{13}{81}$ *donc* $\frac{1}{7}<\frac{13}{81}$

$\frac{1}{6}=\frac{13}{78}$ *or* $\frac{13}{78}>\frac{13}{81}$ *donc* $\frac{1}{6}>\frac{13}{81}$

La plus grande fraction égyptienne inférieure à $\frac{13}{81}$ est donc $\frac{1}{7}$

$$\frac{13}{81}-\frac{1}{7}=\frac{13\times 7}{81\times 7}-\frac{81}{81\times 7}=\frac{91}{567}-\frac{81}{567}=\frac{10}{567}$$

On a donc $\frac{13}{81}=\frac{1}{7}+\frac{10}{567}$

$\frac{1}{57}=\frac{10}{570}$ *or* $\frac{10}{570}<\frac{10}{567}$ *donc* $\frac{1}{57}<\frac{10}{567}$

$\frac{1}{56}=\frac{10}{560}$ *or* $\frac{10}{560}>\frac{10}{567}$ *donc* $\frac{1}{56}>\frac{10}{567}$

La plus grande fraction égyptienne inférieure à $\frac{10}{567}$ est donc $\frac{1}{57}$

$$\frac{10}{567}-\frac{1}{57}=\frac{570}{567\times 57}-\frac{567}{567\times 57}=\frac{3}{567\times 57}=\frac{1}{567\times 19}=\frac{1}{10773}$$

On en déduit que $\frac{10}{567}=\frac{1}{57}+\frac{1}{10773}$ puis que $\frac{13}{81}=\frac{1}{7}+\frac{1}{57}+\frac{1}{10773}$, ce qui est la décomposition demandée.

2. a) $3=\frac{243}{81}$ or $\frac{256}{81}=\frac{243}{81}+\frac{13}{81}$ donc $\frac{256}{81}=3+\frac{13}{81}$

b) En rapprochant les résultats des deux questions précédentes, on obtient :

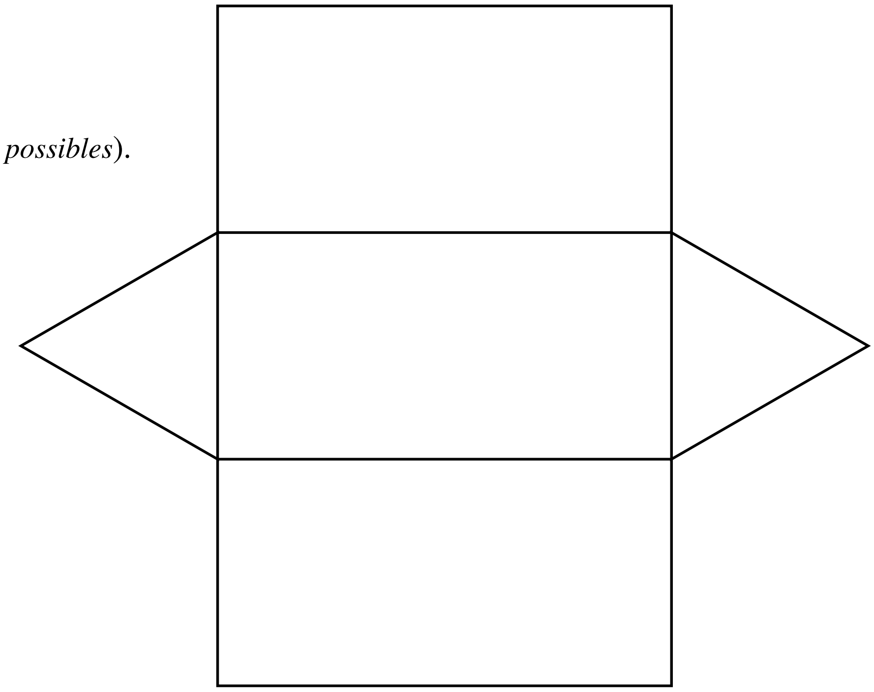
$$\frac{256}{81}=3+\frac{1}{7}+\frac{1}{57}+\frac{1}{10773}$$

Remarque : d'autres décompositions sont possibles, en particulier :

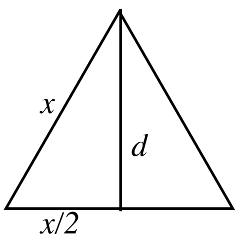
$$\frac{256}{81} = 3+\frac{13}{81} = 3+\frac{9}{81}+\frac{3}{81}+\frac{1}{81} = 3+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$$

Exercice 3

1.(*D'autres dispositions sont évidemment possibles*).



2. Utilisons le théorème de Pythagore dans l'un des deux triangles rectangles obtenus en traçant la hauteur. Le triangle de base étant équilatéral, sa hauteur est également une médiane. Le triangle rectangle utilisé a donc pour dimensions x, $x/2$ et d comme l'indique le schéma ci-contre.



On a donc :

$$x^2 = d^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$x^2 = d^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$d^2 = \frac{3x^2}{4}$$

$$d = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Remarque : on peut connaître par cœur la hauteur du triangle équilatéral en fonction du côté, ce qui dispense de tout ce qui précède : il suffit d'affirmer le résultat final.

L'aire A du triangle est égale à $\frac{1}{2} \times x \times \frac{x\sqrt{3}}{2}$ ce qui, après simplification, est égal à $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

3. a) Le volume du prisme se calcul en multipliant l'aire de sa base par sa hauteur, on a donc :

$$100 = h\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \quad \text{d'où} \quad h = \frac{400}{\sqrt{3} \times x^2}$$

b) L'aire du patron est la somme des aires des faces (trois rectangles et deux triangles).

$$S = 3 \times x \times \frac{400}{\sqrt{3} \times x^2} \quad + \quad 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \quad = \quad \frac{400\sqrt{3}}{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$$

4. a) On peut inscrire la valeur 0,5 dans la cellule A2 puis la formule = A2 + 0,5 dans la cellule A3 puis recopier celle-ci vers le bas.

b) On peut utiliser la formule suivante en B2

= 400*racine(3)/A2 + racine(3)/2*A2*A2

c) Parmi les valeurs calculées, la plus petite valeur de l'aire est atteinte pour x = 7,5 cm.
Comme les valeurs sont calculées de 0,5 cm en 0,5 cm, et en se fiant à l'allure de la courbe, on peut dire que la valeur qui minimise la quantité de carton est 7,5 cm à 0,5 cm près.

d) En utilisant la formule trouvée à la question 3a), on obtient :

$$h = \frac{400}{\sqrt{3} \times 7{,}5^2} = \frac{40000}{\sqrt{3} \times 75^2} = \frac{40000}{\sqrt{3} \times 75^2} = \frac{4 \times 4 \times 25 \times 4 \times 25}{\sqrt{3} \times 3 \times 25 \times 3 \times 25} = \frac{4 \times 4 \times 4}{\sqrt{3} \times 3 \times 3} = \frac{64}{9\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{3}}{27}$$

soit environ 4,1 cm.

Remarque : l'énoncé ne précise pas si la valeur demandée est exacte ou approchée. De façon générale les valeurs demandées sont toujours exactes mais dans un contexte ou la valeur fournie pour le calcul n'est qu'une valeur approchée de la solution du problème, on peut se demander si un calcul exact est vraiment nécessaire.