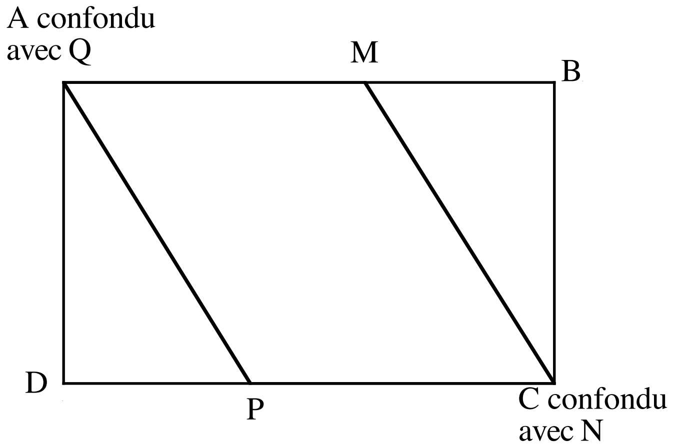
Corrigé (non officiel) de la partie mathématique de l'épreuve de mathématique et sciences.
CRPE session 2012, groupement académique 3, 28 septembre 2011

Les parties en italique sont soit des commentaires soit des méthodes alternatives. Le texte obtenu en supprimant les italiques est supposé rapporter la totalité des points.

Exercice 1

1.

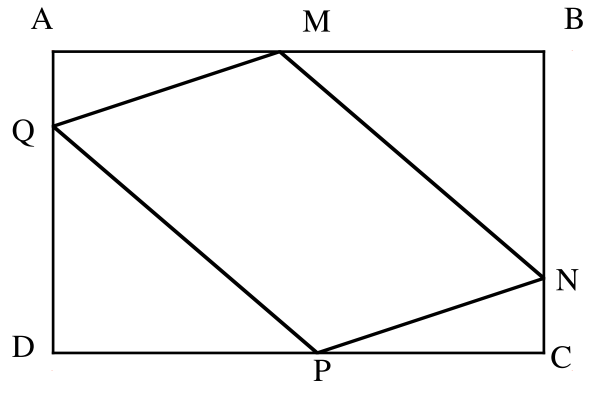


ABCD est un rectangle, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
Les côtés opposés, [NP] et [QM] du quadrilatère non croisé MNPQ sont la fois parallèles et de même longueur, MNPQ est donc un parallélogramme.

Si on choisit comme base du parallélogramme le côté [PN], la hauteur est alors égale à QD.
L'aire de MNPQ est donc égale à 4 x 4 soit 16 centimètres carrés.

Remarque : il est évidemment possible de calculer l'aire en soustrayant l'aire des deux triangles rectangles de celle du rectangle ABCD.

2. Choisissons 3 comme valeur de x



Considérons les segments [QM] et [PN], chacun d'entre eux est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm et 3 cm, ils ont donc la même longueur.
De la même façon, on peut montrer que les segments [MN] et [QP] ont la même longueur.
Le quadrilatère non croisé MNPQ a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, c'est donc un parallélogramme.

3. a) En associant les triangles rectangles AMQ et CPN, on peut former un rectangle dont les dimensions sont x et $4-x$.
En associant les triangles rectangles BMN et DQP, on peut former un rectangle dont les dimensions sont x et $6,5-x$.
Pour calculer l'aire de MNPQ, nous allons soustraire l'aire des deux rectangles décrits ci-dessus de celle du rectangle ABCD.
L'aire de MNPQ est donc égale à : $6,5\times 4 \quad - \quad x(4-x) \quad - \quad x(6,5-x)$

En développant et en réduisant cette expression, on trouve que l'aire de MNPQ est égale à

$$26 \quad - \quad 10,5x \quad + \quad 2x^2$$

b) Pour $x = 0$, le quadrilatère MNPQ est confondu avec ABCD, son aire est donc égale à 26 centimètres carrés, ce qui est bien la valeur donnée par la formule.
Pour $x = 4$, la formule affirme que l'aire est égale à $26 \quad - \quad 10,5\times 4 \quad + \quad 2\times 4^2$ soit 16 centimètres carrés ce qui correspond au résultat de la question 1.

4. Pour $x = 2$, la formule trouvée à la question précédente permet d'affirmer que l'aire de MNPQ mesure 13 centimètres carrés.
Seule la figure 3 est cohérente avec cette valeur, c'est donc elle qui représente la variation de l'aire de MNPQ en fonction de x

D'autres raisonnements sont possibles, on peut par exemple savoir qu'une fonction du second degré est représentée par une parabole et exclure la figure 2 parce que la valeur indiquée pour x = 0 n'est pas correcte.

5.a) Le graphique montre que l'aire minimale est atteinte pour x compris entre 2 et 3.
Par conséquent, la valeur de x pour laquelle l'aire de MNPQ est minimale est 2,5 cm à 0,5 cm près.

b) La valeur minimale de l'aire est 12 cm^2 à un centimètre carré près.

6.a) Il est probablement attendu de répondre qu'une formule du type :

= 26 - 10,5*B1 + 2*B1*B1

Il est clair cependant que cette formule ne permet pas d'obtenir une feuille de calcul conforme à celle qui est présentée : elle ne place pas des points de suspension sous les points de suspension mais renvoie un signal d'erreur car le tableur ne peut effectuer d'opérations arithmétiques à partir de points de suspension.

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	0,1	…	2,1	2,2
2	Aire de MNPQ	26	24,97		12,77	12,58
3						

On peut obtenir un résultat conforme à celui proposé en utilisant par exemple la formule suivante, ainsi qu'en témoigne la copie d'écran ci-dessous montrant la formule une fois recopiée dans la cellule D2

= SI (NB(B1)=1;26 - 10,5*B1+2*B1*B1;"…")

= SI (NB(D1)=1;26 - 10,5*D1+2*D1*D1;"…")

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	0,1	…	2,1	2,2
2	Aire de MNPQ	26	24,97	…	12,77	12,58
3						

Nous osons espérer que ce n'est pas ce qui est attendu des candidats et faisons humblement remarquer que c'est la deuxième fois en deux ans qu'une question portant sur le tableur comporte une erreur.
Il suffirait que les concepteurs du sujet fabriquent leur feuille de calcul de la manière attendue du candidat pour détecter ce type de problème.

b) Dire que 12,22 cm² est une valeur approchée à 0,1 cm² près de l'aire minimale signifie que l'aire minimale est comprise entre 12,12 cm² et 12,32 cm².

On ne connait pas les valeurs de l'aire pour les valeurs de x situées entres celles effectivement calculées, les résultats du tableur ne peuvent donc que suggérer que l'aire minimum est dans cet intervalle, sans constituer une preuve.

7. Développons et réduisons l'expression proposée :

$$2\left(x-\frac{21}{8}\right)^2+\frac{391}{32}$$
$$=2\left(x^2+\frac{441}{64}-\frac{21}{4}x\right)+\frac{391}{32}$$
$$=2x^2+\frac{441}{32}-\frac{21}{2}x+\frac{391}{32}$$
$$=2x^2-10,5x+\frac{832}{32}$$
$$=2x^2-10,5x+26$$

On constate donc que l'expression proposée est égale à celle trouvée à la question 3 pour exprimer l'aire de MNPQ.

Le carré d'un nombre est toujours positif ou nul. La plus petite valeur de l'expression $2\left(x-\frac{21}{8}\right)^2+\frac{391}{32}$ et atteinte quand $\left(x-\frac{21}{8}\right)^2$ a pour valeur 0 c'est à dire quand $x=\frac{21}{8}$

L'aire de MNPQ vaut alors $\frac{391}{32}$, c'est la valeur minimale.

Exercice 2

L'affirmation 1 est fausse.

Justification :

Une augmentation de 10% est obtenue en multipliant par 1,1.

Une augmentation de 50% est obtenue en multipliant par 1,5

les prix sont multipliés par 1, 1 chaque année. Au bout de 5 ans ils ont été multipliés par $1,1^5$ or ce nombre n'est pas égal à 1,5.

L'affirmation 2 est fausse.

Justification :

La proportion de sirop est de $\frac{5}{14}=\frac{55}{14\times 11}$ dans le premier mélange , de $\frac{4}{11}$ dans le second.

$\frac{5}{14}=\frac{55}{14\times 11}$ et $\frac{4}{11}=\frac{56}{14\times 11}$, il en résulte que $\frac{4}{11}>\frac{5}{14}$, le second mélange est donc plus sucré.

L'affirmation 3 est vraie.
Justification :

La somme des probabilités de chacune des issues possibles est égale à 1, on en déduit que $p = \frac{1}{8}$

La probabilité d'obtenir un nombre pair (somme des probabilités d'obtenir 2 et 4) est alors $\frac{1}{2}$.

On a donc autant de chances d'obtenir un nombre pair qu'un nombre impair.

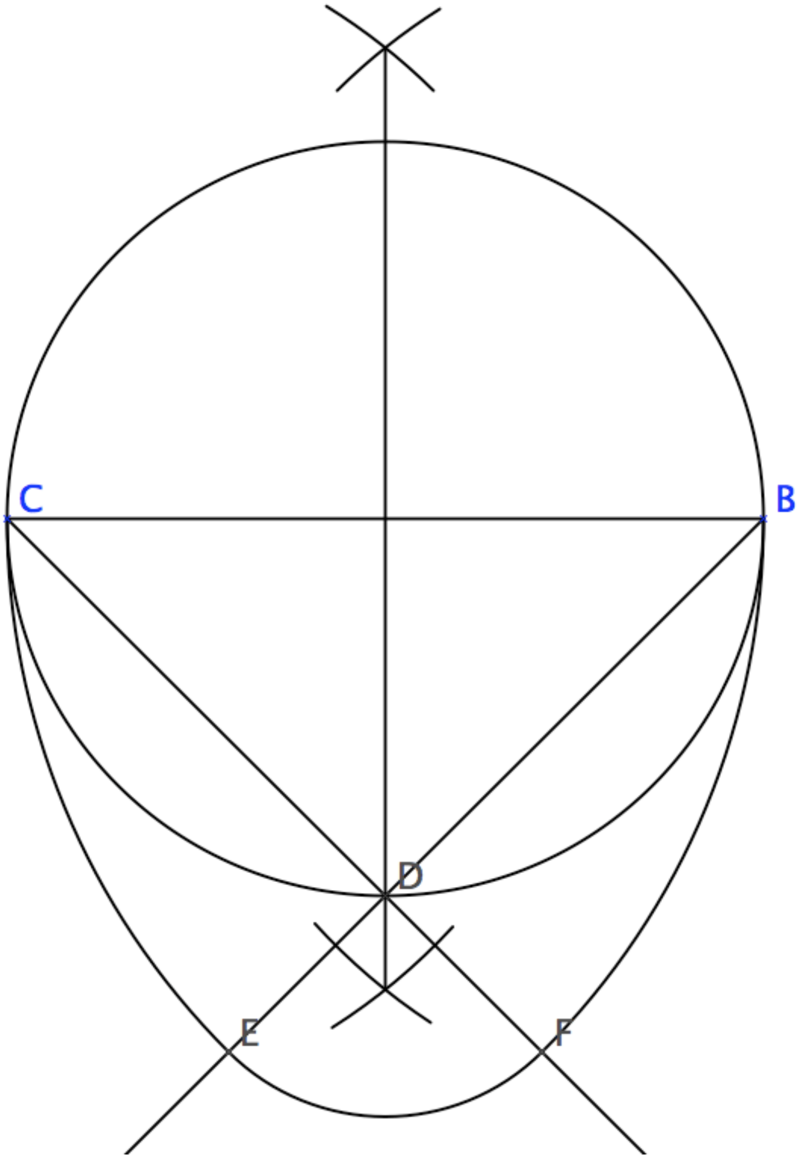
L'affirmation 4 est vraie.
Justification :
Soient n et $n+1$ deux nombres entiers naturels consécutifs.
$(n+1)^2 \quad - \quad n^2 \quad = \quad n^2+2n+1 \quad - \quad n^2 \quad = \quad 2n+1 \quad = \quad n+(n+1)$
L'égalité de la première et de la dernière expression montre que l'affirmation 4 est vraie.

L'affirmation 5 est vraie.
Justification :
Soit c la longueur de l'arête du cube initial.
Le volume du cube initial est c^3
L'arête du cube agrandi mesure 1,1c et son volume mesure $(1{,}1c)^3$ soit $1{,}1^3 \times c^3$ ou $1{,}331 \times c^3$
Le volume a bien augmenté de 33,1%.

L'affirmation 6 est fausse.
Justification :
Si la vitesse sans la technique de l'œuf était de 60 km/h, après augmentation de 50% elle serait de 90 km/h et non 120.

L'affirmation 6 est vraie.
Justification :
C étant sur le cercle de diamètre [AB], le triangle ABC est rectangle en C.
Le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ est le même, qu'on choisisse de l'exprimer à partir des côtés du triangle rectangle ABC ou du triangle rectangle AHC.
Il en résulte que $\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB}$ d'où $AC^2 = AH \times AB = 1 \times n = n$ et $AC = \sqrt{n}$

Exercice 3



Remarque : la construction du point D est faite au compas, l'énoncé ne l'exige pas.

La longueur du demi-cercle de diamètre [BC] est 5π.
La longueur totale des deux arcs de cercles de rayon [BC] (qui, à eux deux, font un quart de cercle) est $\frac{2 \times \pi \times 10}{4}$ soit 5π

[BD] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côté 5, donc BD = $5\sqrt{2}$

Par conséquent, DE $= 10 - 5\sqrt{2}$ et le quart de cercle de centre D a pour longueur $\frac{\pi\left(10 - 5\sqrt{2}\right)}{2}$

Le périmètre de l'ove est donc égal à $10\pi + \frac{\pi\left(10 - 5\sqrt{2}\right)}{2}$ dont la valeur arrondie à 1 mm près est 36 cm.