Corrigé (non officiel) de la partie mathématique de l'épreuve de mathématique et sciences.
CRPE session 2013, groupement académique 1, 28 septembre 2012

Les parties en italique sont soit des commentaires soit des méthodes alternatives.
Le texte obtenu en supprimant les italiques est supposé rapporter la totalité des points.

Exercice 1

L'affirmation 1 est fausse.
Le théorème de Pythagore affirme que la somme des carrés des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égale au carré de l'hypoténuse.
Or, le carré d'un côté n'est autre que l'aire du carré construit sur ce côté.
Comme $64 + 32 \neq 100$, on ne peut pas construire cette figure en respectant toutes les contraintes.
Si par exemple on conserve les dimensions des carrés, le triangle n'est pas rectangle.

L'affirmation 2 est fausse.
18 est multiple de 6 et de 9 et n'est cependant pas multiple de 54. Ce contre exemple suffit à prouver que l'affirmation est fausse.

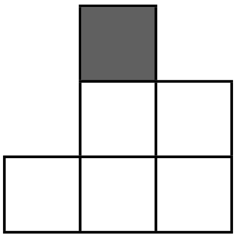
L'affirmation 3 est vraie.
Notons x l'un des deux nombres, l'autre est égal à $400 - x$
Leur produit est $x(400-x) = 400x - x^2$

Si chacun des nombres augmente de 3, ils deviennent respectivement $x + 3$ et $403 - x$
Leur produit est alors :$(x+3)(403-x) = 403x - x^2 + 1209 - 3x = 400x - x^2 + 1209$

La comparaison avec l'expression précédente du produit permet d'affirmer qu'il a bien augmenté de 1209.

L'affirmation 4 est fausse.
Appelons u la quantité de nouriture nécessaire pour alimenter une vache pendant un jour.
L'agriculteur peut alimenter 8 vaches pendant 20 jours, il dispose donc de 160 u.
Pour alimenter 10 vaches pendant 18 jours, il faut 180 u.
L'agriculteur ne pourra donc pas alimenter 10 vaches pendant 18 jours.

L'affirmation 5 est vraie.
Pour construire ce solide avec 7 cubes, il suffit de placer 6 cubes sur le plan de base dans la disposition indiquée par la vue de dessus, puis de placer un 7ème cube sur le cube grisé du schéma ci-dessous.



L'affirmation 6 est fausse.
Voici toutes les expressions possibles (obtenues en mettant entre parenthèses un seul nombre, puis deux, puis trois, puis quatre, et dans chacun de ces cas en écrivant toutes les positions possibles des parenthèses, de gauche à droite, ce qui assure l'exhaustivité).

$(8)\times 7+3\times 5$ $\quad 8\times(7)+3\times 5$ $\quad 8\times 7+(3)\times 5$ $\quad 8\times 7+3\times(5)$

$(8\times 7)+3\times 5$ $\quad 8\times(7+3)\times 5$ $\quad 8\times 7+(3\times 5)$

$(8\times 7+3)\times 5$ $\quad 8\times(7+3\times 5)$

$(8\times 7+3\times 5)$

Sur les dix expressions obtenues, 7 ont la même valeur que l'expression sans parenthèses.
On peut donc obtenir au total un maximum de 4 valeurs distinctes, et non 5 comme proposé dans l'énoncé.

On peut aussi calculer toutes les valeurs et constater qu'on obtient pas 283.

Exercice 2

Partie A

1. Le triangle BDE est rectangle en D.
Son angle de sommet B est le même que l'angle de sommet B du triangle ABC.
Comme ABC est isocèle rectangle, cet angle mesure 45°, et BDE est également isocèle rectangle.
On en déduit que DE = BD = AB-AD = 1-x

L'aire du rectangle ADEF est égale à AD $\times$ DE donc $f(x)=x(1-x)=-x^2+x$

2.
a. La formule =A2-A2*A2 donne le résultat attendu.

*Il en est de même de beaucoup d'autres formules parmi lesquelles =A2-A2^2 ou =-(A2*A2)+A2.*
L'usage du signe $ devant le A n'est pas utile, mais il ne pose pas de problème.
En revanche les références A$2 ou A2 ne produiraient pas le résultat attendu.

b. Le tableau ne permet pas d'affirmer que le maximum de la fonction est atteint pour $x=\frac{1}{2}$.

Par exemple, il ne permet pas à lui seul d'exclure l'hypothèse selon laquelle $f(0{,}51)=0{,}251$

3.
a. $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}=-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=-x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=-x^2+x=f(x)$

Le calcul peut être conduit différemment, mais il faut éviter de donner l'impression que l'égalité à démontrer est connue d'emblée.

b. Un carré est toujours positif, l'expression $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ est donc négative ou nulle.

La valeur maximale de $f(x)$ sera donc atteinte quand $-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ est nulle c'est à dire quand $x=\frac{1}{2}$.

La valeur maximale de $f(x)$ est donc égale à $\frac{1}{4}$.

c. On a vu à la question précédente que l'aire maximale est atteinte pour $x = \frac{1}{2}$

On a alors $AD = x = \frac{1}{2}$ et $DE = 1 - x = \frac{1}{2}$

Le rectangle d'aire maximale a donc deux côtés consécutifs de même longueur, par conséquent c'est un carré.

Partie B

1. ABC est isocèle rectangle en A et AB = 1, le théorème de Pythagore permet alors d'affirmer que :

$$BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$BC = \sqrt{2}$$

Le point G peut se déplacer de B (cas limite où D est confondu avec B) au milieu de [BC] (cas limite où D et E sont confondus avec A, le rectangle étant alors réduit au segment [AG] qui est à la fois hauteur et médiane issues de A du triangle ABC.

La longueur BG varie donc de 0 à $\frac{\sqrt{2}}{2}$ le nombre x se trouve dans l'intervalle [0 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$].

2. Le triangle BDG est rectangle en G.
Son angle de sommet B est le même que l'angle de sommet B du triangle ABC.
Comme ABC est isocèle rectangle, cet angle mesure 45°, et BDG est également isocèle rectangle.
Il en résulte que DG = BG = x.

DEFG est un rectangle, donc DG = EF. Par ailleurs on démontre comme au paragraphe précédent que EF = FC. Il en résulte que FC = x, et que GF = BC - 2x = $\sqrt{2} - 2x$

L'aire du rectangle DEFG est égale à DG × GF, on a donc $g(x) = x\left(\sqrt{2} - 2x\right)$

3.
a. Pour inscrire un rectangle d'aire 0,2 m², x doit valoir soit un peu moins de 0,2 soit légèrement plus que 0,5. Ceci correspond à deux positions du point G, à presque 20 cm de B et à un peu plus de 50 cm de B.

b. L'aire maximale est d'environ 0,25 m².

c. Le côté d'un carré d'aire 0,25 m² mesure 0,5 m or le graphique montre que quand l'aire est maximale, x vaut environ 0,35 m et DG = x. Le rectangle d'aire maximale n'est donc pas un carré.

Exercice 3

1. Supposons que n soit pair, le nombre A_n possède alors un nombre pair de chiffres.

Il peut alors s'obtenir comme une somme, écrite ici sous forme d'addition posée en colonnes :

```
                      11
+                  11 00
+               + 11 00 00
+            + 11 00 00 00
+
+
+
+    11 00 00 ……00 00 00
```

Le groupement des chiffres par deux et non par trois comme c'est l'usage a pour but de montrer clairement la parité du nombre de chiffres.

Chacun des nombres de la somme est un multiple de 11 (c'est le produit de 11 par une puissance de 10), la somme l'est donc également. Quand n est pair, A_n est divisible par 11.

Supposons maintenant que n soit impair.

A_n peut s'écrire sous la forme 11111…110 + 1.

On a donc $A_n = 10\,(A_{n-1}) + 1$

Comme n est impair, n-1 est pair par conséquent (d'après la partie précédente) A_{n-1} est multiple de 11.

10 (A_{n-1}) est alors également multiple de 11, mais pas son successeur 10 (A_{n-1}) + 1 qui a pour reste 1 dans la division euclidienne par 11.

Conclusion : A_n est divisible par 11 si et seulement si n est pair.

2. A_n est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3, c'est à dire si n est divisible par 3.

   A_n est divisible par 33 si et seulement si il est divisible à la fois par 3 et par 11, c'est à dire si n est à la fois pair et divisible par 3.

Conclusion : A_n est divisible par 33 si et seulement si n est multiple de 6.