Corrigé (non officiel) de la partie mathématique de l'épreuve de mathématique et sciences.
CRPE session 2013, groupement académique 2, 28 septembre 2012

Les parties en italique sont soit des commentaires soit des méthodes alternatives.
Le texte obtenu en supprimant les italiques est supposé rapporter la totalité des points.

Exercice 1

L'affirmation 1 est vraie.
pour tout nombre entier naturel n, on a :
$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n + 2 \times 2^n + 4 \times 2^n = 7 \times 2^n$ ce qui établit que $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

L'affirmation 2 est vraie.
La probabilité pour que plusieurs évènements indépendants soient réalisés est le produit des probabilibés de chacun des évènements.
La probabilité que la réponse soit juste aux trois questions est donc $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

On peut également raisonner en dessinant l'arborescence des possibilités : il existe 27 combinaisons de réponses, dont une seule est entièrement correcte.

L'affirmation 3 est fausse.
La probabilité que toutes les réponses soient fausses est $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, qui n'est pas égal à $\frac{1}{3}$

L'affirmation 4 est vraie.
Dans un agrandissement, si les dimensions d'une figure sont multipliées par k, son aire est multipliée par k^2.
Soit D l'aire du disque central.
Il faut multiplier le rayon de ce disque par 4 pour obtenir le rayon du plus grand des disques blancs donc l'aire du grand disque blanc est 16D
Il faut multiplier le rayon de ce disque par 5 pour obtenir le rayon du plus grand disque donc l'aire du grand disque est 25D.
L'aire de la zone grisée, différence entre les aires de ces deux disques est donc égale à

$$25D - 16D = 9D$$

Le rapport de l'aire du disque central sur l'aire grisée est donc $\frac{1}{9}$.

Un raisonnement exactement identique sur les carrés permet de montrer que le rapport de l'aire du carré central sur l'aire grisée est également $\frac{1}{9}$.

Il était également possible de ne pas raisonner à partir des agrandissements, mais de calculer explicitement les aires des figures utiles puis leur rapport.

Exercice 2

1. M est sur [CR] donc RM = RC - MC.

B est sur [RP] donc RB = RP -BP

EPRC est un carré, donc RP = RC et par hypothèse BP = CM, on en déduit que RP - BP = RC - CM, ce qui revient à dire que RM = RB.

On en déduit que $\frac{RM}{RC}=\frac{RB}{RP}$

Les points R, M et C sont alignés ; Les points R, B et P sont alignés, dans le même ordre que R, M et C ; De plus $\frac{RM}{RC}=\frac{RB}{RP}$, donc les droites (MB) et (PC) sont parallèles, ce qui revient à dire que les droites (AB) et (TU) sont parallèles.

(UB) et (TA) sont parallèles de part la définition du point U.

Le quadrilatère BATU a ses côtés opposés parallèles deux à deux, c'est donc un parallélogramme.

EPRC est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires. Il en résulte que l'ange de sommet T du parallélogramme BATU est droit.

BATU est un parallélogramme et a un angle droit, c'est donc un rectangle.

2.

a. M étant situé sur [CR], la distance CM varie de 0 à la longueur du segment.

x est dans l'intervalle]0 ; 40[(intervalle ouvert car C et R sont exclus par l'énoncé).

b. Le triangle UBP est rectangle en U, et il a un angle de 45° (angle formé par un côté et une diagonale du carré EPRC) c'est donc un triangle isocèle rectangle : PU = UB.

En appliquant à ce triangle le théorème de Pythagore, on obtient :

$$UB^2+UP^2=BP^2$$

$$2UB^2=BP^2$$

$$UB^2=\frac{BP^2}{2}$$

$$UB=\frac{BP}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}BP=\frac{\sqrt{2}}{2}x$$

c. Par le même raisonnement appliqué au triangle PRT, on établit que

$$PT=\frac{\sqrt{2}}{2}PR=40\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or $TU=PT-PU=PT-BU$ donc $TU=40\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(40-x)$

d. La mesure de l'aire du rectangle BATU est égale à $UB\times UT$;

Si on nomme $A(x)$ l'expression de cette mesure, on a :

$$A(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(40-x)\times x\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2x(40-x)}{4}=\frac{x(40-x)}{2}$$

3. D'après le graphique, l'aire semble être maximale quand $x=20$. La mesure de l'aire maximale semble être de 200 cm².

4.

a. $\dfrac{-(x-20)^2}{2}+200=\dfrac{-(x^2-40x+400)}{2}+200$

$$\frac{-(x-20)^2}{2}+200=\frac{-x^2+40x-400}{2}+200$$

$$\frac{-(x-20)^2}{2}+200=\frac{-x^2+40x}{2}-\frac{400}{2}+200$$

$$\frac{-(x-20)^2}{2}+200=\frac{-x^2+40x}{2}$$

$$\frac{-(x-20)^2}{2}+200=\frac{x(40-x)}{2}=A(x)$$

Il existe évidemment d'autres façons de conduire le calcul, mais il ne faudrait pas donner l'impression que l'égalité que l'on cherche à démontrer est connue avant d'effectuer le calcul.

b. Un carré est toujours positif ou nul. Il en résulte que $\dfrac{-(x-20)^2}{2}$ est négatif ou nul.

La valeur maximale de $A(x)$ sera donc atteinte quand $\dfrac{-(x-20)^2}{2}$ est nul, ce qui est le cas quand $x = 20$.

c. Quand $x = 20$, on a $UB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x=20\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On a également $TU=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(40-x)=20\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Quand x = 20, les côtés consécutifs [BU] et [TU] du rectangle BATU ont donc la même longueur, BATU est donc alors un carré.

Exercice 3

1.

a. Il y a 8 ascendants au degré 3.

b. Le nombre d'ascendants au degré n est égal à 2^n

2.

a. Le descendant direct d'un homme de numéro p dans l'arbre a pour numéro $\dfrac{p}{2}$

b. Le descendant direct d'une femme de numéro m dans l'arbre a pour numéro $\dfrac{m-1}{2}$

c. Etudions séparément le cas ou Dominique est un homme et celui ou Dominique est une femme.

Si Dominique est un homme, Camille doit l'être aussi, ce qui revient à dire que $\dfrac{d}{2}$ est pair, ou encore que d est multiple de 4.

Si Dominique est une femme, Camille doit l'être aussi, ce qui revient à dire que $\dfrac{d-1}{2}$ est impair, c'est à dire que $\dfrac{d-1}{2} = 2k+1$, k étant un entier.

On a alors : $d-1 = 4k+2$; $d = 4k+3$ ce qui revient à dire que le reste de la division euclidienne de d par 4 est 3.

Camille et Dominique sont donc de même sexe dans deux cas : quand d est multiple de 4 et quand d a pour reste 3 dans la division par 4.

3. En appliquant les formules énoncées aux questions 2a et 2b, on calcule les numéros successifs des descendants directs de la personne de numéro 191.

On obtient successivement : 191 95 47 23 11 5 2
Cette personne est donc un ascendant du côté du père.

3. En appliquant les formules énoncées aux questions 2a et 2b, on calcule les numéros successifs des descendants directs de la personne de numéro 257.

On obtient successivement : 257 128 64 32 16 8 4 2.
Le chemin qui relie Claude à Françoise compte 7 hommes.