Concours de recrutement de professeur des écoles, mai 2015
Session exceptionnelle de l'académie de Créteil
Corrigé non officiel de l'épreuve de mathématiques

Les remarques en italique ne font pas partie des réponses attendues des candidats.

Première partie (13 points)

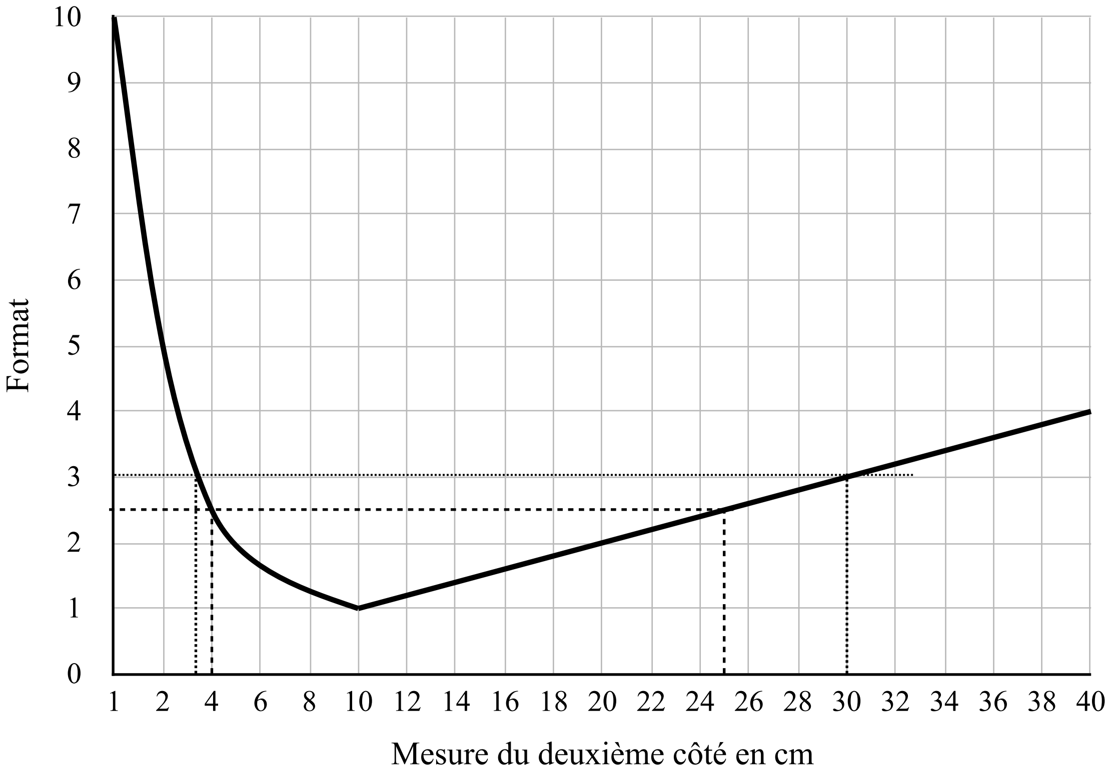
A. Étude d'un premier cas particulier

1. a) Un rectangle de longueur 10 cm et de largeur 2,5 cm a un format égal à $\frac{10}{2,5}$ soit 4.

   b) Un rectangle de longueur 40 cm et de largeur 10 cm a un format égal à $\frac{40}{10}$ soit 4.

2.

Mesure en cm du deuxième côté	2	4	10	18	32	60
Format du rectangle	5	2,5	1	1,8	3,2	6



Le format n'est pas proportionnel à la mesure du deuxième côté. En effet, quand la mesure du deuxième côté passe de 2 cm à 4 cm, elle est multipliée par 2 et le format est dans le même temps divisé par 2 (s'il y avait proportionnalité, il serait également multiplié par 2).

3.
a) D'après le graphique les rectangles dont le format est trois ont un deuxième côté mesurant soit 30 cm, soit un peu plus de 3 cm.

b) Nommons x la mesure du deuxième côté.

Si ce deuxième côté est la longueur du rectangle, on obtient $\frac{x}{10} = 3$ d'où $x = 30$.

Si ce deuxième côté est la largeur du rectangle, on obtient $\frac{10}{x} = 3$ d'où $x = \frac{10}{3} \simeq 3{,}3$

c) D'après le graphique les rectangle dont le format est inférieur à 2,5 ont un deuxième côté dont la mesure est comprise entre 4 cm et 25 cm.

d) Nommons x la mesure du deuxième côté.

Si ce deuxième côté est la longueur du rectangle, on obtient $\frac{x}{10} < 2{,}5$ d'où $x < 25$. On a alors $10 \leq x < 25$.

Si ce deuxième côté est la largeur du rectangle, on obtient $\frac{10}{x} < 2{,}5$ d'où $x > 4$. On a alors $4 < x \leq 10$.

Pour trouver tous les rectangles dont le format est inférieur à 2,5, il faut regrouper les deux cas : il s'agit des rectangles dont le deuxième côté a une mesure en cm strictement comprise entre 4 et 25.

B. Format commercial d'un rectangle

1. Si les rectangles AIJD et IBCJ ont le même format que ABCD, on a alors $\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}}$.

On en déduit que $\frac{L^2}{2} = l^2$ donc que $L^2 = 2l^2$ puis que $L = \sqrt{2} \times l$.

Le format F de ce rectangle est alors égal à $\frac{\sqrt{2} \times l}{l}$ c'est à dire à $\sqrt{2}$.

2. Puisque l'aire d'un rectangle de format A0 est de 1 mètre carré ses dimensions L_0 et l_0 (exprimées en mètres) sont telles que $L_0 \times l_0 = 1$.

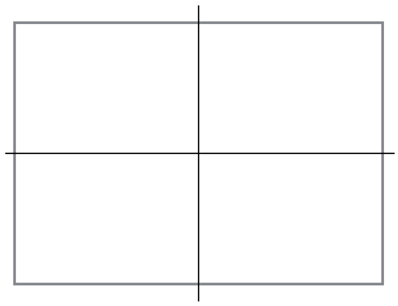
Par ailleurs le format de ce rectangle est égal à $\sqrt{2}$ donc $\frac{L_0}{l_0} = \sqrt{2}$.

En multipliant membre à membre ces deux égalités, on obtient $L_0^2 = \sqrt{2}$

En élevant au carré les deux termes de l'égalité $\frac{L_0}{l_0} = \sqrt{2}$, on obtient $\frac{L_0^2}{l_0^2} = 2$, d'où l'on tire $\frac{\sqrt{2}}{l_0^2} = 2$ puis

$l_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Le schéma ci-contre montre une feuille A3 partagée en deux feuilles A4, puis en quatre feuilles A5. Il permet de comprendre que les dimensions de la feuille A5 sont égales à la moitié des dimensions de la feuille A3, soit 0,210 m et 0,1485 m.
La longueur d'une feuille A5 est de 210 mm, sa largeur arrondie au mm est de 149 mm.

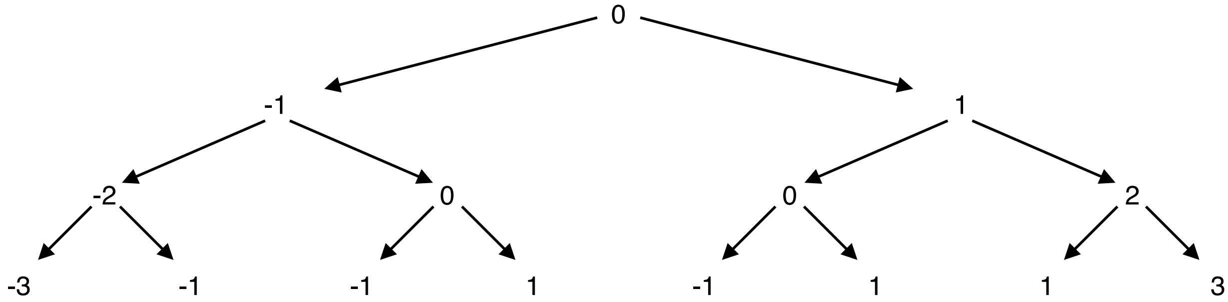


Remarque : l'arrondi en mm est le nombre entier de mm le plus proche, décider d'arrondir 148,5 à 149 plutôt que 148 est une convention… nous espérons que les valeurs 148 mm et 149 mm seront toutes deux acceptées.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

1.



L'arborescence ci-dessus représente tous les parcours possible de la puce.
Elle montre qu'au bout de 3 secondes :
a) la probabilité que la puce soit au point d'abscisse 0 est égale à 0.
b) la probabilité que la puce soit au point d'abscisse 1 est égale à 3/8.
c) la probabilité que la puce soit au point d'abscisse 2 est égale à 0.
d) la probabilité que la puce soit au point d'abscisse 3 est égale à 1/8.

2. Quand on a gratté la première case, les trois cases restantes comportent un motif identique à celui visible et deux motifs différents, on a donc une chance sur trois de gratter le motif identique, la probabilité de gagner une boisson est de 1/3.

Exercice 2

1. Le triangle EAB est isocèle en A donc les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{ABE}$ ont sont égaux.
Les angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{BEC}$ sont des angles alternes internes formés par les droites parallèles (AB) et (EC) et par leur sécante commune (BE), ils sont donc égaux.
Il résulte des deux points précédents que $\widehat{AEB} = \widehat{BEC}$, la droite (EB) est donc la bissectrice de $\widehat{AEC}$.

2. La somme des angles d'un triangle est égale à 180°. Dans le triangle ABE on a donc $130° + 2 \times \widehat{AEB} = 180°$ d'où $\widehat{AEB} = \dfrac{180° - 130°}{2} = 25°$ il en résulte que $\widehat{BEC} = 25°$ puis, en se plaçant dans le triangle BEC, que $\widehat{BCE} = 180° - (90° + 25°) = 65°$.

3. Dans un triangle rectangle, le sommet de l'angle droit est situé sur le cercle ayant l'hypoténuse pour diamètre. Il en résulte que les trois sommets sont à égale distance du milieu de l'hypoténuse. Par conséquent KE = KB et le triangle EBK est isocèle en K.

4. Les triangles isocèles AEB et KEB ont la même base et leurs angles à la base sont égaux, par conséquent ils sont superposables. Il en résulte que le quadrilatère ABKE a quatre côtés de même longueur, c'est donc un losange.

5. K étant le milieu de [EC], on a EC = 2EK = 2AB = 9 cm.

Exercice 3

1. Les dimensions sur la maquettes sont proportionnelles aux dimensions réelles.
700 000 km en réalité correspondent à 180 mm sur la maquette.

Le diamètre de la terre est de12 800 km en réalité dans la maquette il sera de $180\ mm \times \frac{12800}{700000} \simeq 3{,}291\ mm$
L'arrondi au mm du diamètre de la terre dans la maquette est de 3 mm.

2. La distance terre soleil est de $700000\ km \times \frac{3847}{18}$ soit environ 150 000 000 km.

Exercice 4
1.

Nombre N choisi	résultat étape 2	résultat étape 3	résultat étape 4
15	1	2	225
5	0	0	25
145	14	210	21025

2. L'affirmation de l'élève est vraie pour les trois exemples du tableau, prouvons qu'elle l'est pour tout entier N dont le chiffre des unités est 5.
soit d le nombre de dizaines de N alors N = 10d + 5.

$$N^2 = (10d+5)^2 = 100d^2+100d+25 = 100\left(d^2+d\right)+25 = 100\times d\times(d+1) + 25$$

La dernière expression du carré de N correspond exactement au nombre obtenu par l'algorithme, l'affirmation de l'élève est donc vraie.

Troisième partie (14 points)

Situation 1

1. Les choix proposés correspondent d'une part à la valeur correcte du périmètre (14 cm), d'autre part à des valeurs erronées correspondant à des erreurs probables :
   12 cm est obtenu en multipliant la longueur par la largeur (confusion avec la formule de l'aire du rectangle).
   7 cm (Longueur + largeur) et 24 cm ((longueur x largeur)x2) sont également des valeurs que des enfants peuvent obtenir s'ils n'utilisent pas la connaissance de base « le périmètre est la longueur du tour de la figure » mais des formules mal comprises et mal mémorisées.

2. On peut proposer les valeurs suivantes : 20 cm ; 26 cm ; 23 cm.
   20 cm est la valeur correcte du périmètre.
   26 cm est la valeur obtenue en appliquant la règle erronée suivante : « quand on assemble deux figures, le périmètre de la figure obtenue est la somme des périmètres des deux figures assemblées ».
   23 cm est la réponse qu'on obtient en calculant la somme des deux périmètres puis en soustrayant 3 cm parce que le segment situé à l'intérieur de la figure ne fait pas partie du tour.

   Remarque : ce raisonnement est presque correct, pour qu'il soit correct il suffirait de remarquer que ce segment intérieur correspond à un côté du carré et à un côté du rectangle. En calculant la somme des périmètres, on prend en compte à tort ces deux côtés, il convient donc de soustraire deux fois 3 cm de la somme des périmètres.

Situation 2

1. Dans le domaine grandeur et mesure, l'élève devra mobiliser les connaissances suivantes :
Savoir que l'aire d'un rectangle est obtenue en multipliant sa longueur par sa largeur.
Savoir tracer des segments d'une longueur donnée.

Remarque : il est peu probable qu'un élève réussisse le problème sans mobiliser la première connaissance, mais en réalité elle n'est pas absolument indispensable. Il est par exemple possible, si on sait que le centimètre carré correspond à l'aire d'un carré d'un centimètre de côté, de chercher une disposition *rectangulaire de 120 petits carrés et de trouver par exemple qu'on peut les disposer en 12 rangées de 10 carrés.*

2. Dans des domaines autres que « grandeur et mesure », il faut que l'élève ait des connaissances géométriques sur le rectangle : il a des angles droits, et ses côtés opposés ont la même mesure.

Par ailleurs, toujours dans le domaine géométrique et si la construction est demandée sur papier non quadrillé, il faut savoir tracer un angle droit.

Dans le domaine numérique, il faut savoir trouver deux entiers dont le produit est 120.

Remarque : plusieurs connaissances permettent d'y parvenir.
L'élève peut par exemple poser des divisions euclidiennes de 120 par différents entiers, jusqu'à trouver un diviseur permettant d'obtenir un reste nul (et des dimensions, diviseur et quotient, compatibles avec le support dont il dispose).
Il peut aussi remarquer que puisque 120 se termine par un 0, c'est un multiple de 10, c'est 12 x 10. Cette procédure est plus économique lorsqu'il n'est demandé qu'un rectangle, la procédure par division serait plus efficace si on en cherchait plusieurs (voire tous les rectangles de dimensions entières).

Situation 3

1. Le quadrillage permet de déterminer facilement le périmètre en comptant les segments unités sur le tour de la figure, et l'aire en comptant les carreaux unités à l'intérieur de la figure.

Dans le problème 2 les figures ont le même périmètre alors que l'aire de B est supérieure à celle de A.
En l'absence de quadrillage, l'égalité des périmètres aurait pu passer inaperçue à cause d'imprécisions dans les mesures. Or c'est précisément le fait que des figures d'aires différentes peuvent avoir le même périmètre qui est l'enjeu de ce problème.

Dans le problème 3, le quadrillage permet également de constater facilement que deux figures peuvent avoir le même périmètre sans avoir la même aire (A et B ou A et C) et aussi que deux figures ayant à la fois même aire et même périmètre ne sont pas forcément identiques (B et C).

Situation 4

1. Les questions « Quelle est la figure la plus petite ? Quelle est la figure la plus grande ? » sont volontairement ambigües. On peut y répondre :

- en comparant les aires des rectangles,
- en comparant les périmètres des rectangles,
- en comparant les plus longueurs des rectangles.

2. Le groupe 1 a comparé les largeurs des rectangles, « le plus de papier » semble donc interprété comme « la figure la plus large ». Il est possible que la largeur dont il est question ne soit pas la largeur du rectangle au sens mathématique, mais la dimension horizontale, « le plus de papier » aurait donc pour ces élèves le sens de « la figure qui occupe le plus de place horizontalement ».

Pour le groupe 2, « le plus de papier » semble signifier « la figure qui a le plus grand périmètre ».

Le groupe 3 décrit une procédure permettant de comparer correctement les aires : si une figure tient entièrement à l'intérieur d'une autre, son aire est plus petite. Il est possible d'effectuer cette comparaison en découpant une figure et en déplaçant les morceaux, à condition de ne pas les superposer. Pour ces élèves « le plus de papier » signifie donc « la figure qui a l'aire la plus grande ».