Corrigé (non officiel) de l'épreuve de mathématiques du CRPE session 2011

Exercice 1

Un cycliste parcourt 100 km. Pendant les premiers 50 kilomètres, il roule à 25 km/h de moyenne puis, fatigué, à 15 km/h pendant les 50 derniers kilomètres.
Affirmation 1 : sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est 20 km/h.
Faux : le cycliste parcourt les 50 premiers kilomètres en 2 heures, et les 50 suivante en plus de trois heures (il parcourt 45 km en 3 heures). La durée totale du trajet est donc supérieure à 5 heures, or il faudrait que cette durée soit égale à 5 heures pour que la vitesse moyenne soit de 20 km/h.

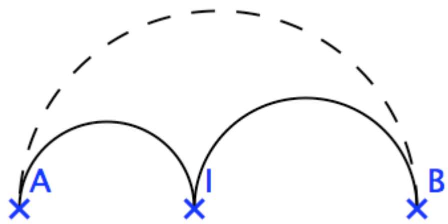
Affirmation 2 : tout nombre entier de trois chiffres dont les chiffres des centaines dizaines et unités sont les mêmes est divisible par 37.
Vrai : un tel nombre s'écrit *aaa* ou *a* est un entier pouvant valoir de 1 à 9.
or $aaa = 111\,a$, et $111 = 37 \times 3$ donc $aaa = 37 \times 3a$
$3a$ étant un entier, *aaa* est donc multiple de 37.

Affirmation 3 : deux nombres premiers impairs sont premiers entre eux.
Faux : les nombres 15 et 25 ont 5 comme diviseur commun et ne sont donc pas premiers entre eux.
L'affirmation n'est donc pas vraie de façon générale (ce qui est le sens de la formulation proposée) bien qu'elle soit vraie dans un certain nombre de cas, par exemple pour 21 et 25 ou pour 3 et 5.

Affirmation 4 : l'inverse de $\left(9-4\sqrt{5}\right)$ est $\left(9+4\sqrt{5}\right)$

Vrai : dire qu'un nombre *a* est l'inverse de *b* signifie que *ab = 1*
Il suffit donc de calculer le produit des deux nombres proposés.
$$\left(9-4\sqrt{5}\right)\left(9+4\sqrt{5}\right) = 9^2-\left(4\sqrt{5}\right)^2 = 81-80 = 1$$

La figure ci-contre est composée de trois demi-cercles.
Affirmation 5 : la longueur du chemin en trait plein est égale à celle du chemin en pointillés.
Vrai si le point I est situé sur le segment [AB], ce qui est suggéré par le dessin mais pas explicitement dit.
Faux dans le cas contraire.



En effet, la longueur d'un demi cercle de diamètre d est égale à $\frac{\pi}{2}$ d .

La longueur du trait pointillé est donc $\frac{\pi}{2}$ AB

La longueur du chemin en trait plein est $\frac{\pi}{2}$ AI + $\frac{\pi}{2}$ IB soit $\frac{\pi}{2}$ (AI + IB)

Il y a donc égalité si et seulement si AB = AI + IB, c'est à dire si I est sur [AB].

La réponse attendue est probablement «vrai» avec la justification ci-dessus, mais on peut espérer que la réponse «faux» en soulevant le problème de l'alignement soit également acceptée.

Dans un laboratoire, on cultive des bactéries.
La population de bactéries augmente de 20% par heure.
Affirmation 6 : la population de bactéries sera multipliée par 2 au bout de 5 heures.
Faux : Augmenter un nombre de 20 % c'est le multiplier par 1,2.
Si on note p la population initiale, on aura ensuite d'heure en heure, des populations égales à
1,2 p
1,2 × 1,2 p = 1,44 p
1,2 × 1,44 p = 1,728 p
1,2 × 1,728 p = 2,036 p
la population de bactéries a plus que doublé au bout de 4 heures et continue à augmenter, elle ne peut donc pas être multipliée par 2 au bout de 5 heures.

Exercice 2
Partie 1
1. a) Voici quelques formules pouvant être entrées dans la cellule B2 puis recopiées vers la droite :

= 0,08 * B1*B1	**= 0,08 * B1^2**	= 0,08 * B$1* B$1
= 0,08 * B$1^2		
= $B3 * B1* B1	= B3 * B1* B1	**= $B3 * B1^2**
= B3 * B1^2	= $B3 * B$1* B$1	= B3 * B$1* B$1
= $B3 * B$1^2	= B3 * B$1^2	

Liste non exhaustive.

b) Parmi les formules proposées au a), les quatre premières ne satisfont pas cette contrainte.
En revanche les suivantes conviennent. L'une d'entre elle peut donc être proposée à la question b si on a utilisé l'une des précédentes à la question a).

2. a) A la vitesse de 72 km/h, on parcourt 72 000 mètres en 3600 secondes or 72000 = 3600 × 20, on parcourt donc 20 mètre par seconde.
La distance de freinage est donc égale à 0,08 x 20^2 soit 32 mètres.

b) La vitesse demandée est celle pour laquelle la distance est égale à 45 m. Si on note v la vitesse correspondante (en mètre par seconde) on a :

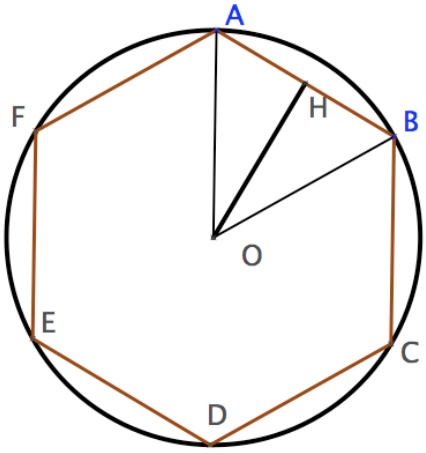
$$45 = 0{,}08v^2 \quad \text{d'où} \quad v^2 = \frac{45}{0{,}08} = 562{,}5 \quad \text{et} \quad v = \sqrt{562{,}5}$$

Or quand on parcourt un mètre par seconde, on parcourt 3600 mètres en une heure.
On en déduit que 1 m/s = 3,6 km/h.
Par conséquent, la vitesse exprimée en km/h est égale à $3{,}6 \times \sqrt{562{,}5}$
La distance de freinage est supérieure à 45 mètres si la vitesse en km/h est supérieure à
$3{,}6 \times \sqrt{562{,}5}$ (soit 85 en valeur arrondie à l'unité).

Partie 2
1. Par lecture graphique, la distance de freinage est d'environ 144 m pour une vitesse de 30 m/s
En utilisant ces valeurs, on obtient $144 = k \times 30^2$ d'où $k = \dfrac{144}{900} = 0{,}16$
Le coefficient k vaut donc environ 0,16 sur route mouillée.

2. Est-il attendu seulement de dire que la courbe représentant la distance de freinage sur route sèche est en dessous de l'autre ?
Et quel calcul est nécessaire pour le justifier ?
Il est évident que pour toute valeur de la vitesse v, $0{,}08v^2 < 0{,}16v^2$

Faut-il aller plus loin et dire que pour toute valeur de v, le point de la courbe correspondant à la route sèche est situé au milieu du point de l'axe des abscisses et du point situé sur l'autre courbe… ce qui n'est vrai que si le coefficient pour la route mouillée est bien 0,16 comme on l'a trouvé à partir des valeurs lues sur le graphique.



Problème
Partie A

L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux superposables à AOB.

Or le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon r.
Par ailleurs, OAB étant équilatéral, Le pied H de la hauteur issue de O est aussi le milieu de [AB].
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle OHB, dans lequel OB = r et HB = r/2 on obtient donc :

$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + OH^2$$

$$OH^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$OH = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$

On en tire que l'aire de l'hexagone est $6 \times \dfrac{r \times \frac{\sqrt{3}}{2}r}{2} = 3 \times r \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}r = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}r^2$

Partie B
1. La distance entre deux sommets opposés est un diamètre du cercle circonscrit à l'hexagone. Le rayon de ce cercle est donc égal à 9,45 mm
Le volume du prisme droit de hauteur 8 mm ayant pour base l'hexagone, exprimé en mm³ est :

$$8 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 9{,}45^2$$

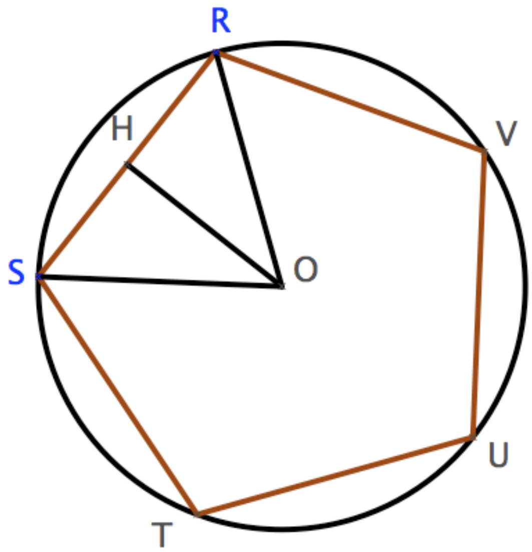
Le volume du cylindre central dans la même unité est $8 \times \pi \times 5^2$ soit 200π

Le volume de l'écrou, en mm³ est donc égal à $8 \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times 9{,}45^2 - 200\pi$ soit

$1071{,}63\sqrt{3} - 200\pi$ dont la valeur arrondie à l'unité est 1228.

Le rédacteur de ce corrigé rappelle ici que le sujet est supposé être en relation avec les contenus de l'école primaire…les valeurs chosies qui imposent un maniment intensif de la calculatrice et excluent le calcul mental ou posé sont totalement inadaptée dans cet esprit.

2. Un mètre cube contient un milliard de mm^3. (1000 x 1000 x 1000)
La masse d'un mètre cube de laiton est 8 400 000 g,
La masse d'un millimètre cube de laiton est donc 8 400 000 : 1 000 000 000 = 0, 0084 grammes
La masse de l'écrou est égale à son volume en millimètres cubes multiplié par la masse d'un millimètre cube.
Cette masse est donc égale à
$(1071{,}63\sqrt{3} \quad - \quad 200\pi) \times 0{,}0084$ grammes dont la valeur arrondie à l'unité est 10 grammes.



Partie C

1. Le pentagone régulier étant constitué de 5 triangles superposables à ROS, l'angle $\widehat{ROS}$ mesure 360/5 = 72°

Dans le triangle rectangle ORH, l'angle de sommet O mesure donc 36° et on a OH = OR x cos 36° = r cos 36°

2.
On montre comme à la question précédente que
HR = r sin 36°
on a donc RS = 2r sin 36°
Pour calculer l'aire de ROS, prenons comme base [RS] et comme hauteur [OH]
L'aire de ROS est alors égale à $\dfrac{2r \times \sin 36° \times r \times \cos 36°}{2} = r^2 \times \sin 36° \times \cos 36°$

Le pentagone étant formé de 5 triangles identiques, son aire est 5 fois celle de ROS, elle vaut
$5r^2 \times \sin 36° \times \cos 36°$

Conclusion générale : le ministère de l'éducation nationale ne semble pas avoir la moindre idée de ce qu'est un professeur des écoles et du type de mathématique qui peut lui être utile.
On peut penser par exemple au calcul mental ou aux calculs posés simples qui n'apparaissent à aucun moment dans ce sujet.