Corrigé non officiel de la partie mathématique de la deuxième épreuve d’admissibilité. groupement académique 1
CRPE session 2014 (14 juin 2013)

Exercice 1

1. L’affirmation 1 est fausse, car l’homme peut également avoir 89 ans.
Le plus simple est probablement de faire une recherche systématique à partir des multiples de 11.

2. Le temps est sec aujourd’hui, la probabilité pour qu’il soit sec demain est de 5/6
La probabilité pour qu’il soit sec demain et humide après-demain est donc de 1/6 x 5/6 soit 5/36
Le temps est sec aujourd’hui, la probabilité pour qu’il soit humide demain est de 1/6
La probabilité pour qu’il soit humide demain et humide après-demain est donc de 2/3 x 1/6 soit 2/18 ou 4/36.
Un temps humide après-demain peut être obtenu par un des deux déroulements décrits ci-dessus, et seulement ainsi, la probabilité en est donc de 5/36 + 4/36 soit 9/36 ou 1/4
L’affirmation 2 est vraie.

Le raisonnement ci-dessus peut être remplacé par une arborescence ou un tableau montrant tous les cas possibles.
Les cases de la ligne grise représentent des issues équiprobables pour demain, celles de la ligne blanche des issues équiprobables pour après-demain.
Pour que ces issues soient équiprobables, il a fallu envisager six issues possibles après un jour humide comme après un jour sec.

sec						sec						sec						sec						sec						humide					
S	S	S	S	S	H	S	S	S	S	S	H	S	S	S	S	S	H	S	S	S	S	S	H	S	S	S	S	S	H	S	S	H	H	H	H

3. 3600 : 8 = 450. La voiture parcourrait donc en une heure 450 x 150 m soit 67500 m ou 67,5 km. Elle n’est donc pas en excès de vitesse, **L’affirmation 3 est fausse.**

4. Le produit de deux nombres impairs est impair, c’est en particulier le cas du carré d’un nombre impair.
La somme de deux nombres impairs est paire, c’est donc le cas pour la somme des carrés de deux nombres impairs. **L’affirmation 4 est vraie.**

5. 3 + 5 = 8 et 8 n’est pas premier, **l’affirmation 5 est fausse.**
2 + 3 = 5 et 5 est premier, **l’affirmation 6 est fausse.**

Exercice 2

1. On a acheté 50 cl de boisson A, la bouteille contient donc 5 cl de jus d’orange.
Une bouteille de 100 cl de boisson B contiendrait également 5 cl de jus d’orange, la bouteille de 1,25 L (ou 125 cl) en contient donc plus.

2. Dans 20 cl de boisson A, il y a 2 cl de jus d'orange.
Dans 30 cl de boisson B, il y a 30 cl x 0,05 soit 1,5 cl de jus d'orange.

Il y a donc 3,5 cl de jus d'orange dans 50 cl de mélange, soit 7 cl de jus d'orange dans 100 cl de mélange. Le pourcentage de jus d'orange dans le mélange est de 7%.

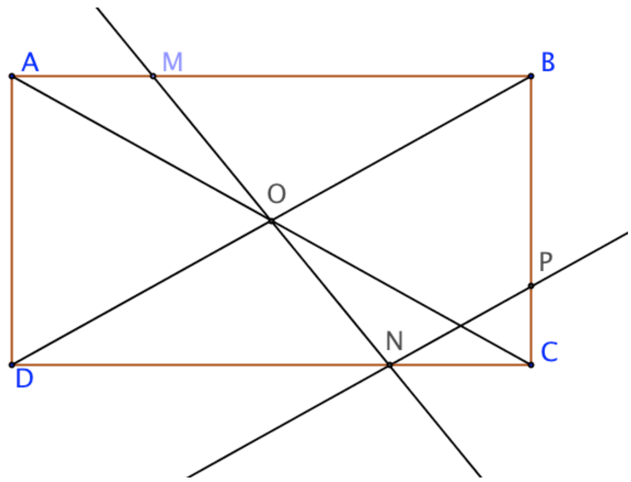
3. soit a le volume en cl de boisson A dans le mélange, b le volume en cl de boisson B.
Le volume total est de 40 cl, on a donc a+b = 40
Le volume de jus d'orange dans le mélange est de 8% de 40 cl soit 3,2 cl.
On a donc 0,10 a + 0,05 b = 3,2 autrement dit a + 0,5 b = 32 ou 2a + b = 64

Les nombres a et b sont donc les solutions du système $\begin{cases} a+b=40 \\ 2a+b=64 \end{cases}$

En comparant les deux équations (ou en soustrayant membre à membre la première à la seconde), on constate que a = 24. En reportant cette valeur dans la première équation, on déduit que b = 16.
Il faut donc verser dans le verre 24 cl de boisson A et 16 cl de boisson B.

4. Après recopie, la formule contenue dans la cellule C14 est =(0,1*A14+0,05*B14)/40.
Le nombre calculé est donc (0,1 x 12 + 0,05 x 28)/40 soit (1,2 + 1,4)/40 ou 0,065.
La cellule C14 affiche alors 0,065.
C'est le volume de jus d'orange (en cl) dans un centilitre du mélange, ce qui correspond au pourcentage de jus d'orange dans le mélange (0,065 = 6,5/100 = 6,5%).

Exercice 3



Partie A

1) Le quadrilatère MBCN est un trapèze rectangle. Ses côtés [MB] et [CN] sont parallèles puisque ABCD est un rectangle, et ses angles de sommets B et C sont droits pour la même raison.

2) Le point O est le centre de symétrie du rectangle ABCD.
Dans la symétrie de centre O, C est le symétrique de A.
Dans cette même symétrie, le symétrique du point M, qui appartient au rectangle, est un point du rectangle situé sur la droite (OM), c'est donc le point N.

Comme C est le symétrique de A et N le symétrique de M, les segments [AM] et [CN] sont symétriques et ont donc la même longueur.

3) Les points C, N et D sont alignés. Les points C,P et B sont alignés. Les droites (PN) et (BD) sont parallèles. Dans ces conditions, le théorème de Thalès, appliqué aux triangles CNP et CDB, affirme que $\frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CB}$.

On en déduit que $\frac{CN}{9} = \frac{CP}{5}$ donc que $CP = \frac{5}{9}CN$

Or BP = 5 - CP, donc $BP = 5 - \frac{5}{9}CN$

Par ailleurs CN = 9-DN, en remplaçant dans l'égalité précédente CN par 9-DN on obtient :

$$BP \quad = \quad 5 - \frac{5}{9}(9 - DN) \quad = \quad 5 - \left(5 - \frac{5}{9}DN\right) \quad = \quad \frac{5}{9}DN$$

Or BM = 9 - AM et DN = 9 - NC et AM = NC, il en résulte que BM = DN et donc que $BP = \frac{5}{9}BM$.

Remarques :

on obtient $BP = \frac{5}{9}DN$ *de façon beaucoup plus rapide en utilisant l'égalité suivante :* $\frac{DN}{CD} = \frac{BP}{CB}$ *. Cette égalité est vraie, mais n'est pas la conséquence du théorème de Thalès tel qu'il est actuellement enseigné. Le raisonnement utilisant cette égalité sera-t'il accepté ?*

Par ailleurs, au lieu de déduire l'égalité de BM et DN de celle de AM et NC, on peut se contenter de dire qu'elle se prouve de la même façon que pour AM = NC.

Partie B

1) a. Les égalités de longueur montrées dans la question précédente permettent d'affirmer que les trapèzes MBCN et NDAM sont superposables. Chacun d'eux a donc pour aire la moitié de l'aire du rectangle, soit 22,5 cm^2 quelle que soit la position du point M. *(on peut évidemment calculer cette aire en utilisant la formule d'aire du trapèze).*

b. L'aire du triangle BMP, rectangle en B, est égale à $(BM \times BP):2$

Comme AM = 6 cm , BM = 9cm - 6cm = 3 cm.
En utilisant le résultat de la partie A, question 3, on obtient que l'aire de BMP est égale à $\left(3 \times \frac{5}{9} \times 3\right):2$ soit 2,5 cm^2

L'aire du triangle PNC, rectangle en C se calcule de la même façon, elle vaut $\left(6 \times \frac{5}{9} \times 6\right):2$ soit 10 cm^2.

c. L'aire du triangle MNP s'obtient en soustrayant les aires des deux triangles précédents de celle du trapèze MBNC. Elle mesure donc 10 cm^2.

2) a. La réponse à cette question a été fournie à la question **1) a.**

b. En reprenant le même raisonnement qu'aux questions 1b et 1c, mais dans le cas général où AM = x.

La mesure de l'aire de PMB est donnée par $\left((9-x)\times\frac{5}{9}\times(9-x)\right):2$

La mesure de l'aire de PCN est donnée par $\left(x\times\frac{5}{9}\times x\right):2$

L'aire de MPN mesure donc $22{,}5 \;-\; \left((9-x)\times\frac{5}{9}\times(9-x)\right):2 \;-\; \left(x\times\frac{5}{9}x\right):2$

En simplifiant cette expression, on obtient successivement :

$$f(x) = 22{,}5 - \left(\left(x^2-18x+81\right)\times\frac{5}{9}\right):2 - \left(\frac{5}{9}x^2\right):2$$

$$f(x) = 22{,}5 - \frac{1}{2}\left(\left(\left(x^2-18x+81\right)\times\frac{5}{9}\right) + \left(\frac{5}{9}x^2\right)\right)$$

$$f(x) = 22{,}5 - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9}x^2-10x+45+\frac{5}{9}x^2\right)$$

$$f(x) = 22{,}5 - \frac{1}{2}\left(\frac{10}{9}x^2-10x+45\right)$$

$$f(x) = 22{,}5 - \frac{5}{9}x^2+5x-22{,}5$$

$$f(x) = -\frac{5}{9}x^2+5x$$

3) a. La courbe de la figure 2 ne convient pas, car elle représente une fonction linéaire, ce qui n'est pas le cas de la fonction f.

La courbe de la figure 1 ne convient pas, car le résultat de la question 1c. indique que $f(6)=10$. La seule courbe pouvant être convenable est donc celle de la figure 3.

b. L'aire maximale est obtenue pour une valeur de x proche de 4,5.

La valeur de cette aire maximale, arrondie à l'unité, est de 11 cm².

4) a. Pour montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme fournie, nous allons partir de cette expression et la transformer pour aboutir à l'écriture trouvée en 2b.

$$\frac{45}{4}-\frac{5}{9}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{45}{4}-\frac{5}{9}\left(x^2-9x+\frac{81}{4}\right) = \frac{45}{4}-\frac{5}{9}x^2 + \frac{5}{9}\times 9x - \frac{5}{9}\times\frac{81}{4}$$

$$= \frac{45}{4}-\frac{5}{9}x^2+5x-\frac{45}{4} = -\frac{5}{9}x^2+5x$$

L'expression obtenue est celle trouvée pour $f(x)$ à la question 2b, on a donc bien

$f(x) = \frac{45}{4} - \frac{5}{9}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2$

b. $f(x)$ atteint sa valeur maximale quand l'expression $\frac{5}{9}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2$ que l'on soustrait à $\frac{45}{4}$ prend sa valeur minimale.

L'expression $\frac{5}{9}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2$ est le produit d'un nombre positif par un carré (qui est nécessairement positif ou nul. La plus petite valeur possible de cette expression est donc 0, elle est atteinte quand $x = \frac{9}{2}$.

Par conséquent, l'aire du triangle MNP est maximale quand $x = \frac{9}{2}$, ce qui confirme la lecture graphique.

c. La valeur maximale de l'aire s'obtient en donnant la valeur $\frac{9}{2}$ à x dans l'une des expressions trouvées pour $f(x)$

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{5}{9}\times\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 5\times\frac{9}{2} = -\frac{45}{4} + \frac{45}{2} = \frac{45}{4}$$

L'aire maximale du triangle MNPest donc de 11,25 cm², ce qui confirme également la lecture graphique.